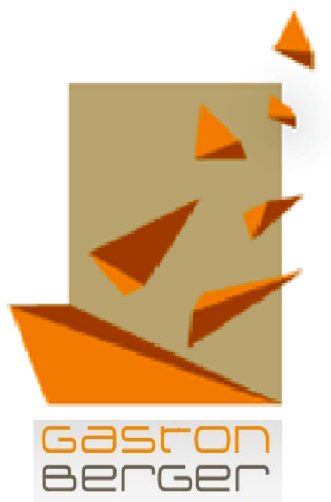




ECT₁

**Cours de Mathématiques en classes
préparatoires commerciales voie
technologique**

Cours de Première année



Table des matières

Entête	1
1 Logique mathématique	4
I Propositions et connecteurs logiques	4
II Logique des prédicats	8
III Théorie mathématique	9
2 Ensembles et applications	10
I Ensembles	10
II Fonctions et applications	12
3 Calcul numériques et algébriques	15
I Calcul numérique	15
II intervalles de $\mathbb{R}$	19
4 Polynôme	22
I Définition et Terminologie	22
II Polynômes du premier et du second degré	23
III Factorisation	25
5 Probabilités élémentaires	27
I Vocabulaire sur les ensembles	27
II Probabilité conditionnelle	30
III Indépendance	34
6 Suites arithmétiques et géométriques	36
I Suites Arithmétiques	36
II Suites Géométriques	37
III Sommes et symbole Σ	37
IV Suites arithmético-géométriques	40
7 Limites d'une fonction	43
I Notion de limite	43
II Limites de références	45
III Opérations sur les Limites	47
8 Dérivées d'une fonction	52
I Notion de dérivée	52
II Opérations sur les dérivées et dérivées usuelles	53
III Application des dérivées	56
IV Étude d'une fonction	61
9 Statistiques univariées	62
I Vocabulaire	62
II Statistiques élémentaires	63
III Caractéristiques d'une variable aléatoire	65

10 Continuité et Convexité	68
I Définitions et Propriétés	68
II Convexité	70
11 Coefficients binomiaux	72
I Combinaisons	72
II Formule du binôme de Newton	73
12 Primitives et intégrales	75
I Primitives	75
II Intégrales	82
13 Variables aléatoires discrètes finies	85
I Définitions et propriétés	85
II Moments d'une variable aléatoire	86
14 Valeur absolue	88
I Valeur absolue d'un nombre	88
II Fonction valeur absolue	89
15 Lois usuelles	91
I Loi uniforme	91
II Loi de Bernoulli	93
III Loi binomiale	94
16 Logarithmes et exponentielles	98
I Fonction logarithme	98
II Exponentielles	108
17 Compléments sur les limites	118
I Limites et relation d'ordre	118
II Théorème de convergence monotone et des gendarmes	119
18 Systèmes linéaires	122
I Définitions	122
II Résolution d'un système linéaire	123
19 Suites réelles	126
I Définitions	126
II Sens de variation et limite d'une suite	127
20 Propriétés de l'intégrale	132
I Linéarité de l'intégrale et intégration par parties	132
II Positivité de l'intégrale et relation de Chasles	133

Chapitre 1

Logique mathématique

Le terme « logique » vient du grecque « logos » (Λόγος) qui signifie à la fois parole, discours et raison. La logique est l'étude du raisonnement, voire du raisonnement *vrai* ou *valide*. Ou pour le dire autrement, la logique est l'étude du vrai.

La première étude connue de la logique est celle d'Aristote (né en -384 à Stagire, mort en -322 à Chalcis). Son ouvrage consacré à la logique s'appelle l'*Organon* qui signifie littéralement « l'outil ». En effet, la logique est l'*outil* de la science. Il n'y a de science que s'il y a *démonstration*, c'est à dire raisonnement valide, dont les prémisses sont vraies.

I Propositions et connecteurs logiques

1 Propositions

Ce qui intéresse la logique ce sont les *propositions* c'est-à-dire les phrases susceptibles d'être vraies ou fausses. Toutes les phrases ne sont pas susceptibles d'être vraies ou fausses. Par exemple, il semble difficile de se prononcer sur la vérité ou la fausseté de la phrase : « l'actuel Roi de France est chauve » (car l'expression « l'actuel Roi de France » ne *désigne* personne). De même, la plupart des phrases du quotidien, notamment les ordres (« passe-moi le sel », « tournez à gauche ») ne sont ni vraies ni fausses. Enfin, « ce tableau est beau » n'est pas non plus considéré comme une proposition mathématique car le mathématicien ne parvient pas à donner une valeur de vérité à cette phrase (faute de critère « objectif », c'est-à-dire mathématisable pour déterminer la beauté d'un tableau).

La logique mathématique est une logique dite *binaire* car elle ne contient que deux valeurs de vérité : le vrai (noté V) et le faux (noté F).

 Exemple:

- « $2+2 = 7$ » est une proposition. Cette proposition est fausse.
- « $2+3 = 5$ » est une proposition. Cette proposition est vraie.
- Attention ! « $x+3 = 5$ » n'est pas une proposition car x n'est pas défini. On ne sait pas si cette proposition est vraie ou fausse. On parle de *forme propositionnelle*. Cette forme propositionnelle deviendra une proposition lorsqu'on donnera une valeur à x .

2 Connecteur logique

On appelle connecteur (ou opérateur) logique un symbole permettant de transformer une proposition en une autre, ou qui permet de relier plusieurs propositions.

On en distingue généralement cinq : la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

On explicite généralement la signification des cinq opérateurs à l'aide de *tables de vérité* :

1. La négation.

A	$\bar{A}$
F	V
V	F

Ce qui signifie que si la proposition A est fausse alors la négation de A (notée $\bar{A}$ ou *non* – A) est vraie. Et si A est vraie, alors sa négation est fausse. Par exemple si la proposition A : « cette maison est blanche » est fausse alors on peut en déduire que la proposition *non* – A : « cette maison n'est pas blanche » est vraie.

2. La conjonction (ET)

A	B	A et B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

La conjonction de deux proposition n'est vraie que si les deux propositions sont vraies.

3. La disjonction (OU)

A	B	A ou B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

La disjonction de deux proposition est vraie dès que l'une au moins des propositions est vraie. Le « ou » en mathématiques est *inclusif*.

4. L'implication (si...alors, $\Rightarrow$)

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Une implication est vraie sauf si l'antécédent (la proposition A) est vrai et que le conséquent (la proposition B) est faux. Par exemple si A : « il pleut », et B : « je prends mon parapluie », alors $A \Rightarrow B$ désigne la proposition « s'il pleut alors je prends mon parapluie ». La seule manière de réfuter une telle proposition est de constater qu'il pleut et de constater que je n'ai pas pris mon parapluie. S'il ne pleut pas, peu importe si j'ai pris ou non mon parapluie, la proposition $A \Rightarrow B$ reste vraie. On dit parfois que « le faux implique n'importe quoi ».

5. L'équivalence (si et seulement si, $\Leftrightarrow$)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Une équivalence est vraie lorsque les deux propositions A et B ont la même valeur de vérité (c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses).

3 Lois de De Morgan

Il existe des liens entre les différents connecteurs :

$\overline{A \text{ ou } B}$ équivaut à $\overline{A} \text{ et } \overline{B}$ (loi de De Morgan)

$\overline{A \text{ et } B} \text{ équivaut à } \overline{A} \text{ ou } \overline{B} \text{ (loi de De Morgan).}$ ¹

 Remarque:

- Par ailleurs on a $A \Rightarrow B$ équivaut à $\overline{A} \text{ ou } B$.
- Enfin, $\overline{\overline{A}}$ et A sont des propositions équivalentes.

4 Conditions nécessaires et suffisantes, contraposée et réciproque

Les propositions de la forme $A \Rightarrow B$ sont appelées propositions conditionnelles. Pour celles-ci, on établit deux séries de distinctions.

Lorsque la proposition $A \Rightarrow B$ est vraie on dit que A est une condition suffisante pour B . On dit encore qu'il suffit d'avoir A pour avoir B .

Lorsque $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ est vraie on dit que A est une condition nécessaire pour B . On dit encore qu'il faut avoir A pour avoir B .

Enfin, lorsque $A \Leftrightarrow B$ est vraie on dit que A est une condition nécessaire et suffisante pour B . On dit encore qu'il faut et il suffit d'avoir B pour avoir A .

 Exemples:

- On note A la proposition « J'ai obtenu mon baccalauréat » et B la proposition « Je peux m'inscrire à l'université ». La proposition $A \Rightarrow B$ (« Si j'ai obtenu mon baccalauréat, je peux m'inscrire à l'université ») est une proposition vraie. A est une condition suffisante pour B . En effet, il *suffit* d'avoir obtenu son baccalauréat pour s'inscrire à l'université.
- On note A la proposition « J'ai plus de 16 ans » et B la proposition « Je peux passer mon permis de conduire ». La proposition $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ (« Si j'ai moins de 16 ans, je ne peux pas passer mon permis ») est une proposition vraie. A est une condition nécessaire pour B . En effet, il *faut* avoir plus de 16 ans pour pouvoir passer le permis.

On appelle *réciproque* de la proposition $A \Rightarrow B$, la proposition $B \Rightarrow A$.

$A \Rightarrow B$ est appelée implication directe, et $B \Rightarrow A$ est appelée implication réciproque. Ces deux implications **ne sont pas** équivalentes.

On appelle *contraposée* de la proposition $A \Rightarrow B$, la proposition $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Ces deux implications **sont** équivalentes.

 Exemples:

On note A la proposition : « le triangle DEF est un triangle équilatéral » et B la proposition « l'angle $\widehat{DEF}$ mesure 60° »

- L'implication directe $A \Rightarrow B$ (« si le triangle DEF est un triangle équilatéral, alors l'angle $\widehat{DEF}$ mesure 60° ») est vraie. Mais l'implication réciproque $B \Rightarrow A$ (« si l'angle $\widehat{DEF}$ mesure 60° , alors le triangle DEF est un triangle équilatéral ») est fausse.
- Par contre, la contraposée $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (« si l'angle $\widehat{DEF}$ ne mesure pas 60° , alors le triangle DEF n'est pas un triangle équilatéral ») est vraie.

1. Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique.

II Logique des prédicats

1 Quantificateurs

Nous avons vu précédemment un exemple d'une forme propositionnelle avec une variable x qui n'était pas encore une proposition faute de pouvoir donner une valeur à la variable x . En logique des prédicats, on introduit deux quantificateurs : le quantificateur universel ($\forall$, « pour tous ») et le quantificateur existentiel ($\exists$, « il existe ») qui permettent de donner une valeur aux variables logiques.

 Exemples:

- La proposition A suivante : « $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5$ » signifie que « pour tout réel x , $x + 2 = 5$ », autrement dit, si on ajoute deux à n'importe quel réel, on obtient 5. Cette proposition est fausse !
- La proposition A suivante : « $\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5$ » signifie que « il existe un réel x tel que $x + 2 = 5$ », autrement dit, on affirme qu'on peut trouver un réel dont la somme avec deux nous donne cinq. Cette proposition est vraie. $x = 3$ convient. (Nous venons de résoudre une équation).
- La proposition A suivante : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » signifie que « pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ », autrement dit, le carré d'un nombre réel est toujours positif. Cette proposition est vraie.
- La proposition A suivante : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -3$ » signifie que « il existe un réel x tel que $x^2 = -3$ », autrement dit, on affirme qu'on peut trouver un réel dont le carré est égal à -3 . Cette proposition est fausse.

2 Raisonnements classiques

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à quatre raisonnements classiques :

1. Raisonnement par contre-exemple.

Lorsqu'il s'agit de montrer qu'une proposition universelle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

Par exemple, la proposition A : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq 0$ » est fausse car $(-2)^3 = -8 < 0$.

-2 est un contre-exemple. Cette méthode est sans doute la plus simple si on veut montrer la fausseté d'une proposition universelle.

2. Raisonnement par disjonction des cas.

Parfois, il est difficile de montrer une proposition universelle dans toute sa généralité. On distingue ainsi différents cas et on traite tous les cas. Si on parvient à montrer que le résultat est valable dans tous les cas, alors la proposition universelle considérée sera vraie.

Par exemple, pour montrer que la proposition A : « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ est pair » , on distingue deux cas :

Premier cas : n est pair. Dans ce cas, n^2 est pair, et leur somme est paire.

Deuxième cas : n est impair, n^2 est lui aussi impair, et leur somme est paire.

3. Raisonnement par contraposition.

Pour montrer la proposition conditionnelle $A \Rightarrow B$, on peut montrer la contraposée.

4. Raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde, ou réduction à l'impossible, consiste à supposer la négation de la proposition A dont on souhaite montrer la vérité. Ainsi, on suppose que A est fausse, et on montre qu'on aboutit nécessairement à une contradiction, à une impossibilité. Si bien que A est vraie.

Par exemple, montrons que 0 n'a pas d'inverse (pour la multiplication) par l'absurde.

Supposons au contraire, que le réel 0 admet un inverse que l'on note a . $a \times 0 = 1$. Or $a \times 0 = 0$ donc $0 = 1$ ce qui est absurde. Conclusion zéro n'a pas d'inverse.

III Théorie mathématique

Une théorie mathématique est un ensemble de propositions vraies, ou plutôt un ensemble de règles qui permettent de déterminer la valeur de vérité des différentes propositions considérées. Dans toute théorie mathématique on distingue les propositions démontrées de celles qui servent à démontrer les autres

1 Définitions

On appelle définition toute proposition qui *introduit* un nouveau terme en lui donnant un sens. Par exemple, « un cercle est l'ensemble des points du plan situés à une distance donnée d'un point donné » est une définition du mot, du concept *cercle*.

Une définition est toujours une proposition vraie.

Si j'introduis le réel x en posant que $x = 5$, j'ai ainsi défini x . Parfois pour éviter de confondre la définition et la forme propositionnelle, on introduit un autre symbole que l'égalité que l'on appelle affectation, ou égalité par définition ($:=$, $=_{def}$ ou encore $\leftarrow$).

Les langages informatiques distinguent souvent l'affectations ($x := 5$, $x =_{def} 5$ ou encore $x \leftarrow 5$) de l'égalité $x = 5$.

2 Axiomes

Un axiome est une proposition qui est posée comme vraie afin de pouvoir démontrer la vérité d'autres propositions. Par définition, on ne démontre pas un axiome. En sciences physiques on parle aussi parfois de *postulat*.

Par exemple, l'axiome d'identité affirme que l'on a toujours $x = x$. On considère généralement que les axiomes correspondent à des « évidences ».

3 Théorèmes, propriétés et corollaires

Un *théorème* est une proposition vraie démontrée à partir d'autres propositions vraies (notamment à partir des axiomes).

Il en va de même pour les *propriétés* et les *corollaires*. Un corollaire est une conséquence immédiate d'un théorème et une propriété est un théorème d'importance « mineure ».

Chapitre 2

Ensembles et applications

I Ensembles

1 Appartenance, inclusion, intersection et réunion

Définition 2.1: Appartenance

Soit E un ensemble et x un élément de E . On dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Définition 2.2: Inclusion

Si A et B sont deux ensembles, alors on dit que A est inclus dans B (ou encore que A est un sous-ensemble de B) si tous les éléments de A sont des éléments de B . C'est-à-dire

$$\forall x \in A ; x \in B$$

On note $A \subset B$

 **Remarque:** Attention, il faut soigneusement distinguer l'inclusion et l'appartenance. Un élément *appartient* à un ensemble, mais un ensemble est inclus dans un autre.

 **Exemples:**

- $4 \in \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$
- $7 \notin \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$
- $\{4\} \subset \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$
- $\{4;1\} \subset \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$
- $\{4;7\} \not\subset \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$

Définition 2.3: Réunion

Soit A et B deux ensembles.

(i) On appelle réunion de A et de B , l'ensemble noté $A \cup B$ des x tels que $x \in A$ ou $x \in B$. Autrement dit

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

(ii) On appelle intersection de A et de B , l'ensemble noté $A \cap B$ des x tels que $x \in A$ et $x \in B$. Autrement dit

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

☞ Remarque: En mathématiques le « ou » est inclusif contrairement à l'usage courant en français.

Dans l'expression « fromage ou dessert » le « ou » est exclusif puisqu'on ne peut pas prendre du fromage et du dessert (la conjonction des deux est exclue).

Au contraire, si on dit que pour s'inscrire dans une filière universitaire il faut un baccalauréat ou un diplôme équivalent, le « ou » est inclusif, car on peut très bien avoir un baccalauréat et un autre diplôme équivalent.

✎ Exemples:

- Si $A = \{1; 2; 3; 5\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$, alors

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \text{ et } A \cap B = \{3; 5\}$$

- Si $A = [-1; +\infty[$ et $B =]-9; 7[$, alors

$$A \cup B =]-9; +\infty[\text{ et } A \cap B = [-1; 7[$$

On obtient l'illustration suivante¹ :

Définition 2.4: Ensemble des parties de E

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, formé de tous les sous-ensembles de E (y compris E et $\emptyset$).

✎ Exemple:

- Si $E = \{1; 2; 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

☞ Remarque: Attention ! $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des parties de E. $\mathcal{P}(E)$ contient toujours l'ensemble vide. Dans l'exemple précédent, $\mathcal{P}(E)$ contient l'ensemble vide, les singletons (ensembles à un élément), les paires (ensembles à deux éléments) et l'ensemble E lui-même.

2 Complémentaire

Définition 2.5: Complémentaire

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E.

On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble noté $\bar{A}$, des x qui appartiennent à E, sans appartenir à A.

✎ Exemples:

- Si $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, et $A = \{1; 5\}$ alors $\bar{A} = \{2; 3; 4\}$
- Si $E = \mathbb{R}$, et $A = [-1, 3]$ alors $\bar{A} =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

1. Une telle illustration s'appelle *diagramme de Venn*, du nom du mathématicien anglais John Venn, (1834-1923)

3 Lois de Morgan

Propriété 2.1: Loi de De Morgan

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

4 Produit Cartésien

Définition 2.6: Produit cartésien

Soit A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien, l'ensemble noté $A \times B$, des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.

Exemples:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels. C'est-à-dire des couples (x, y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}^2$ est l'ensemble des couples d'entiers. C'est-à-dire des couples (x, y) tels que $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

Remarque: On définit aussi $\mathbb{R}^n$, où n est un entier naturel non nul, l'ensemble des n -uplets de réels.

II Fonctions et applications

1 Définitions et exemples

Définition 2.7: Fonction

Une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F est une relation qui à tout x de E associe au plus un élément de F.

L'ensemble de définition de f est l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe. On note généralement cet ensemble $\mathcal{D}_f$.

$f(x)$ est appelé *image* de x par f .

x est appelé *antécédent* de $f(x)$ par f .

Exemple : La taille ou la couleur des cheveux est une fonction de l'individu considéré, mais la taille n'est pas fonction de la couleur des cheveux (deux personnes peuvent avoir une taille différentes et pourtant avoir la même couleur de cheveux). Si on note T la taille. Si Pierre et Paul sont bruns, et mesurent respectivement 1m50 et 1m80, alors on aurait $T(x) = 1m50 = 1m80$. Ce qui est impossible.

2 Représentation graphique d'une fonction

Définition 2.8: Fonction

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On appelle courbe représentative de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$. On note cette courbe $\mathcal{C}_f$.

On dit que l'équation (cartésienne) de cette courbe est $y = f(x)$.

☞ Remarque: Conséquence de la définition d'une fonction pour la courbe :

Puisque à tout réel x correspond au plus une image, l'intersection de la courbe représentative d'une fonction avec toute droite verticale est soit vide soit réduite à un point :

3 Composition

Nous allons maintenant introduire la notion de composée de deux fonctions. Cette notion est réputée difficile, et les élèves ne manipulent pas toujours bien cette notion. Cependant, elle s'avère très utile dans les études de fonctions, où, pour trouver le sens de variation d'une fonction, on décomposera volontiers la fonction afin de simplifier le problème.

Définition 2.9: Composition

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans F et g une fonction définie sur l'ensemble F à valeurs dans G (c.a.d pour $x \in E$ on a $f(x) \in F$). On note $g \circ f$ la fonction définie sur E par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour $x \in E$.

☞ Remarque: La notation $g \circ f$ se lit « g rond f »

📎 Exemple: Soit f et g les fonctions définies par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x^2 - 3x \text{ et } g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Alors on peut définir les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sur $\mathbb{R}$ (car $I = J = \mathbb{R}$), et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} ; g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3x) = \sqrt{(x^2 - 3x)^2 + 1} = \sqrt{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + 1}) = (\sqrt{x^2 + 1})^2 - 3 \times \sqrt{x^2 + 1} = x^2 + 1 - 3 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

☞ Remarque: Comme le montre l'exemple précédent, il n'y a aucune raison d'avoir $f \circ g = g \circ f$. C'est pourquoi, il faudra faire très attention à l'ordre dans lequel on compose les fonction, et ne pas confondre $f \circ g$ et $g \circ f$

4 Bijection et application réciproque

Définition 2.10: Bijection

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . Soit F un ensemble. On dira que f est (ou réalise) une bijection de E sur F , si tout élément de F admet un unique antécédent dans E par f .

Autrement dit, $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E .

Définition 2.11: Application réciproque

Soit f une bijection de E sur F . On appelle fonction réciproque de f , la fonction, notée f^{-1} définie par

$$\forall y \in F ; f^{-1}(y) = x \text{ si } f(x) = y$$

☞ Remarque: Avec les notations précédentes, f^{-1} est une bijection de F sur E .

✎ Exemples:

- La fonction carré n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car 2 admet deux antécédents $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
- Par contre, la fonction carré est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque est la fonction racine carré.

Chapitre 3

Calcul numériques et algébriques

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser le calcul numérique élémentaire, sans faire appel inutilement à des outils comme la calculatrice. Nous étudierons dans un premier temps les fractions, ensuite nous étudierons les puissances et finalement nous simplifierons des expressions contenant des racines carrées.

 Contexte historique: Dans l'antiquité, on notait en toute lettre les nombres lorsqu'on effectuait une opération (une somme par exemple). Au XVI^{ème} siècle, François Viète est le créateur du symbolisme mathématique moderne. Il réserve les consonnes pour les grandeurs connues (qu'il écrit en majuscules) et les voyelles pour les inconnues (qu'il écrit en minuscules). René Descartes est le premier à utiliser les dernières lettres de l'alphabet pour les inconnues (x, y, z etc...) et les premières lettres pour les quantités connues (a, b, c etc ...)

I Calcul numérique

1 Fractions

Propriété 3.1: Fractions

Soient (a, b, c, d) quatre réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Pour la troisième égalité, il faut aussi supposer que $c \neq 0$

 Exemples: $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{14 + 15}{21} = \frac{29}{21}$

• $\frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9 + 5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

 Remarque: Lorsqu'on calcule un produit de fractions, il est intéressant de simplifier les fractions **avant** de calculer le produit.

 Exemples: • $\frac{49}{25} \times \frac{5}{7} = \frac{7 \times 7 \times 5}{5 \times 5 \times 7} = \frac{7 \times 7 \times \cancel{5}}{5 \times \cancel{5} \times 7} = \frac{7}{5}$

Si on calcule le produit sans simplifier, on obtient

$$\frac{49}{25} \times \frac{5}{7} = \frac{245}{175}$$

que l'on doit ensuite simplifier pour obtenir finalement $\frac{7}{5}$

- Simplifier $\frac{\frac{15}{28}}{\frac{27}{35}}$.

on a

$$\frac{\frac{15}{28}}{\frac{27}{35}} = \frac{15}{28} \times \frac{35}{27} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5}{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9}$$

En simplifiant par 3 et 7, on obtient

$$\frac{\frac{15}{28}}{\frac{27}{35}} = \frac{25}{36}$$

☞ Remarque: Il est important de simplifier au maximum toutes les fractions, c'est-à-dire de les mettre sous forme *irréductible*. Si le numérateur et le dénominateur ont un diviseur commun, on peut simplifier la fraction. (voir annexe pour les critères de divisibilités).

2 Puissances

Définition 3.1: Puissances

Soit a un réel et n un entier naturel non nul.
On définit a^n de la façon suivante :

$$a^n = \underbrace{a \times a \cdots a}_{n \text{ facteurs}}$$

Si $a \neq 0$, on pose $a^0 = 1$ et

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriété 3.2: Puissances

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$a^{n+m} = a^n \times a^m \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} ; (a \times b)^n = a^n \times b^n ; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ (si } b \neq 0)$$

Démonstration:

Par définition

$$a^{n+m} = \underbrace{a \times a \cdots a}_{n+m \text{ facteurs}}$$

Or, par associativité, on obtient

$$a^{n+m} = \underbrace{a \times a \cdots a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \cdots a}_{m \text{ facteurs}} = a^n \times a^m$$

De même

$$(a \times b)^n = \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \cdots (a \times b)}_{n \text{ facteurs}}$$

Par commutativité et associativité de la multiplication, on peut regrouper les a et les b ensemble, d'où

$$(a \times b)^n = \underbrace{a \times a \cdots a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{b \times b \cdots b}_{n \text{ facteurs}} = a^n \times b^n$$

■

☞ Remarque: On ne peut appliquer les formules précédentes que si l'exposant (i.e. $n = m$) est le même, ou au contraire la base de la puissance (i.e. $a = b$).

✎ Exemples:

- Puissances de 2 avec un exposant positif :

$$2^2 = 2 \times 2 = 4, \quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8, \quad 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, \quad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

- Puissances de 10 avec un exposant positif :

$$10^2 = 10 \times 10 = 100, \quad 10^3 = 1\,000, \quad 10^4 = 10\,000, \quad 10^5 = 100\,000, \quad 10^6 = 1\,000\,000$$

- Puissances de 10 avec un exposant négatif :

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1, \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01, \quad 10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001, \quad 10^{-4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$$

3 Identités remarquables

Propriété 3.3: Identités remarquables

Soient (a, b) deux réels, on a

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$$

Démonstration:

On a

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De même

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Enfin,

$$(a - b) \times (a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

■

On peut illustrer géométriquement la première identité remarquable de la manière suivante : (voir page suivante)

On trace un carré de côté $a + b$. On le découpe en quatre de manière à obtenir un carré de côté a et un autre de côté b . Les deux dernières parties sont des rectangles dont les dimensions sont a et b . Les doubles produits dans l'identité remarquable correspondent donc à l'aire des deux rectangles.

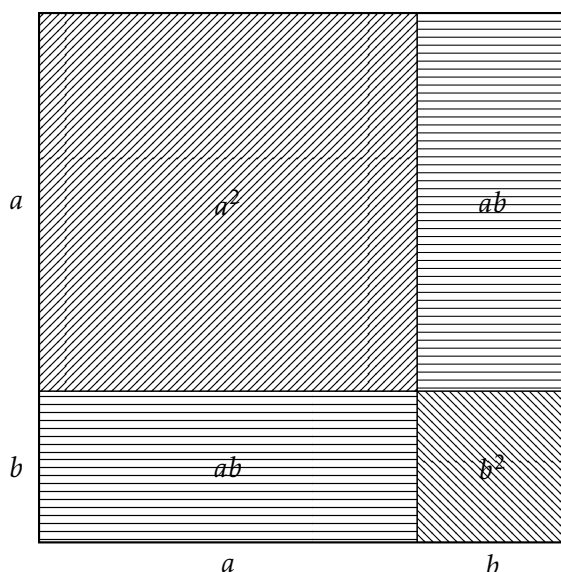


FIGURE 3.1 – Illustration de la première identité remarquable

 **Exemples:** Les identités remarquables peuvent nous permettre de calculer facilement certaines expressions, par exemple :

- $13^2 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 3^2 = 100 + 60 + 9 = 169.$
- $107^2 = (100 + 7)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 7 + 7^2 = 10\,000 + 1\,400 + 49 = 11\,449.$
- $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801.$
- $101^2 - 99^2 = (101 - 99) \times (101 + 99) = 2 \times 200 = 400.$

4 Racines carrées

L'introduction des racines carrées vient historiquement de la géométrie. En effet, d'après le théorème de Pythagore, on sait que l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle de côté 1 vaut $\sqrt{2}$.

Définition 3.2: Racine Carrée

Soit a un réel positif ou nul. On appelle racine carrée de a , l'unique réel positif (ou nul) x solution de l'équation $x^2 = a$.

On note $x = \sqrt{a}$.

Propriété 3.4: Racines

Soient a et b deux réels positifs, on a

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} ; \sqrt{a^2} = a ; (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ si } b \neq 0$$

☞ Remarque: Attention, il est faux en général d'affirmer que

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

En effet, si on choisit $a = 9$ et $b = 16$, on a

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ mais } \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Définition 3.3: Quantités Conjuguées

Soit a un réel.

Soit b un entier naturel qui n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire que $b \in \mathbb{N}$, mais on ne peut pas trouver d'entier naturel c tel que $c^2 = b$).

Dans ce cas, on dit que $a + \sqrt{b}$ et $a - \sqrt{b}$ sont des quantités **conjuguées**.

☞ Exemples:

- La quantité conjuguée de $2 + \sqrt{3}$ est $2 - \sqrt{3}$
- La quantité conjuguée de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
- La quantité conjuguée de $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ est $\sqrt{5} + \sqrt{7}$
- Premier cas : Expressions de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ avec a un réel et b un entier.

Pour faire disparaître la racine carrée, on multiplie par $\sqrt{b}$ au numérateur et au dénominateur.

☞ Exemple: Soit $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$, et on obtient

$$A = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- Premier cas : Expressions de la forme $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ avec a et b deux entiers.

Pour faire disparaître les racine carrées, on multiplie la fraction au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée.

☞ Exemple: Soit $A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, et on obtient

$$A = \frac{1 \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

On reconnaît une identité remarquable. On a donc

$$A = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

II intervalles de $\mathbb{R}$

1 Définition

Définition 3.4: Intervalle

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

On dit que E est un *intervalle* de $\mathbb{R}$ si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall c \in \mathbb{R}, x \leq c \leq y \Rightarrow c \in E$$

Autrement dit tout élément c qui est compris entre deux éléments x et y de E appartient à E .

 Exemples:

- $\mathbb{R}$ est un intervalle.
- $[1 ; 7[$ est un intervalle (par construction).
- $] -1 ; 0] \cup [1 ; 7[$ n'est pas un intervalle car 0,5 n'appartient pas à cet ensemble alors que 0 et 1 y appartiennent.

Définition 3.5: Intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On peut former 11 sortes d'intervalles :

- ① $E = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = [a, b]$ est un intervalle fermé.
- ② $E = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} =]a, b[$ est un intervalle ouvert.
- ③ $E = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = [a, b[$ est un intervalle semi-ouvert.
- ④ $E = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} =]a, b]$ est un intervalle semi-ouvert.
- ⑤ $E = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} = [a, +\infty[$ est un intervalle fermé.
- ⑥ $E = \{x \in \mathbb{R}, x > a\} =]a, +\infty[$ est un intervalle ouvert.
- ⑦ $E = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} =]-\infty, b]$ est un intervalle fermé.
- ⑧ $E = \{x \in \mathbb{R}, x < b\} =]-\infty, b[$ est un intervalle ouvert.
- ⑨ $\emptyset$ est un intervalle.
- ⑩ $\mathbb{R}$ est un intervalle.
- ⑪ L'ensemble $\{a\}$ appelé singleton est un intervalle.

 Remarques: L'intervalle $[a, b]$ est aussi appelé *segment* de $\mathbb{R}$.

Les trois dernières sortes d'intervalles (le vide, $\mathbb{R}$ et les singletons) sont parfois appelés intervalles dégénérés.

2 Résolution d'équations et d'inéquations

Définition 3.6: Équation et Inéquations

Une **équation** est un *problème* mettant en jeu une égalité du type

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé inconnue de l'équation. On dit que l'on *résout* cette équation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$. On note généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$$

Une **inéquation** est un *problème* mettant en jeu une inégalité du type

$$f(x) \geq 0 \text{ (ou } f(x) \leq 0 \text{ ou } f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0)$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé inconnue de l'équation. On dit que l'on *résout* cette équation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) \geq 0$. On note généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$$

 **Exemples:** Résoudre les équations et inéquations suivantes (dans $\mathbb{R}$) :

- Résoudre l'équation $2x + 7 = 0$.

On a

$$2x + 7 = 0 \Leftrightarrow 2x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

D'où l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ vaut

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7}{2} \right\}$$

- Résoudre l'inéquation $-3x + 5 > 0$.

On a

$$-3x + 5 > 0 \Leftrightarrow -3x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$$

D'où l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ vaut

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right[$$

- Résoudre l'inéquation $3x + 4 \geq 0$.

On a

$$3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

D'où l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ vaut

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}, +\infty \right[$$

Chapitre 4

Polynôme

Il est parfois important de connaître le signe d'un polynôme (par exemple s'il s'agit de trouver le signe d'une dérivée). Or la façon la plus simple de trouver un signe est de factoriser le polynôme. Nous étudierons des cas particuliers de factorisation : lorsque l'on connaît une solution de l'équation $P(x) = 0$ où P désigne le polynôme à factoriser. En effet, le cas général est très délicat.

I Définition et Terminologie

1 Polynôme et degré

Définition 4.1: Degré d'un polynôme

On appelle **polynôme**, toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

où n désigne un entier naturel, et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On appelle **degré** du polynôme P le plus grand entier naturel k tel que $a_k \neq 0$.

On note le degré $\deg P$.

 Exemple: Les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) sont des polynômes :

$$P(x) = x^7 - 72x^4 + 3 ; Q(x) = x^4 + 2x^{55} + 99 ; R(x) = 3$$

On a $\deg P = 7$; $\deg Q = 55$; $\deg R = 0$

 Remarque: Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$: $\deg(0) = -\infty$

Définition 4.2: Coefficient d'un polynôme

Soit P un polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

avec $n \neq 0$.

Soit k un entier, avec $1 \leq k \leq n$.

On appelle coefficient de degré k le réel a_k .

On appelle coefficient de plus haut degré le réel a_n .

 Exemple: Dans l'exemple précédent, les coefficients de plus haut degré sont respectivement : 1 ; 2 et 3

Définition 4.3: Terme d'un polynôme

Soit P un polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $n \neq 0$.

Soit k un entier, avec $1 \leq k \leq n$.

On appelle terme de degré k la quantité $a_k x^k$.

On appelle terme de plus haut degré la quantité $a_n x^n$.

 Exemple: Dans l'exemple précédent, les termes de plus haut degré sont respectivement : x^7 ; $2x^{55}$ et 3

2 Racine d'un polynôme

Définition 4.4: Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et r un réel. On dit que r est une racine de P si $P(r) = 0$, autrement dit si r annule P .

 Exemple: Montrons que 1 est une racine du polynôme P défini par $P(x) = x^2 + x - 2$.
On a

$$P(1) = 1^2 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$$

II Polynômes du premier et du second degré

1 Polynôme du premier degré

Propriété 4.1: Polynôme du premier degré

Soit P un polynôme du premier degré. Il existe alors deux réels a et b tels que $a \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = ax + b$$

 Remarque: Un polynôme du premier degré est une fonction affine. Réciproquement toute fonction affine est soit un polynôme du premier degré *soit* une constante (si $a = 0$).

Propriété 4.2: Racines d'un polynôme du premier degré

Soit $P(x) = ax + b$ un polynôme du premier degré. Alors P admet une unique racine, à savoir le réel

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

Démonstration:

En effet

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

■

Théorème 4.1: Signe d'un du premier degré

Soit $P(x) = ax + b$ un polynôme du premier degré

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

On note son unique racine $x_0 = -\frac{b}{a}$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	
$P(x)$		- 0 +		si $a > 0$
$P(x)$		+ 0 -		si $a < 0$

2 Polynôme du second degré**Propriété 4.3: Polynôme du second degré**

Soit P un polynôme du second degré. Il existe alors trois réels a, b et c tels que $a \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = ax^2 + bx + c$$

Définition 4.5: Discriminant

Soit $P = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. On appelle **discriminant** du polynôme P , le réel noté Δ défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 4.2: Signe d'un du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

Le nombre de racines de P dépend du signe du discriminant Δ .

- Si $\Delta < 0$ alors P n'a pas de racine.
- Si $\Delta = 0$ alors P a une unique racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors P a deux racines $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Théorème 4.3: Signe d'un du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

Le signe de P dépend du signe du discriminant Δ et du signe de a .

- Si $\Delta \leq 0$ alors P est toujours du signe de a .
- Si $\Delta > 0$ alors P est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé à l'intérieur.

☞ Remarque: Autrement dit il y a 6 cas :

Si $a > 0$:

(1) $\Delta > 0$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$P(x)$		+	0	-	0	+

(2) $\Delta = 0$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$		$+$ 0 $+$	

(3) $\Delta < 0$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$		+

Si $a < 0$:

(4) $\Delta > 0$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$		
$P(x)$		-	0	+	0	-

(5) $\Delta = 0$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$		- 0 -	

(6) $\Delta < 0$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$		-

III Factorisation

1 Propriété fondamentale

Théorème 4.4: Factorisation d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré n , et r une racine de P (c'est-à-dire $P(r) = 0$). Alors on peut factoriser P par $x - r$.

C'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$$

 Exemple: Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

On remarque que $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. D'où 1 est racine de P .

On va former la division euclidienne de

$$\begin{array}{r|l} x^3 & - & x^2 & + & x & - & 1 & & x & - & 1 \\ -(x^3 & - & x) & & & & & & x^2 & & \\ \hline & & & & x & - & 1 & & & & \\ & & & & -(x & - & 1) & & & & +1 \\ & & & & & & 0 & & & & \end{array}$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

2 Méthode de résolution des exercices

Si l'énoncé n'indique pas une racine du polynôme, il faut essayer d'en trouver une. On peut essayer 0, 1 et 2 ainsi que -1 et -2 (racines dites évidentes).

Il existe des méthodes pour trouver les racines de polynômes de degrés 3 ou 4 lorsqu'il y en a, mais elles ne sont pas au programme. C'est pourquoi, pour résoudre des équations de degré 3 ou 4, on procèdera par factorisation.

 Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation du troisième degré $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

On pose $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. P admet 1 comme racine, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

On pose $Q(x) = x^2 + 1$. Q est un polynôme du second degré. $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$.

D'où Q n'admet pas de racines.

L'équation $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ n'a donc qu'une seule solution :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

Chapitre 5

Probabilités élémentaires

 Contexte historique: Au XVII^{ème} siècle, le chevalier de Méré propose un problème lié à un jeu de pile ou face interrompu. Comment faut-il répartir les gains sachant que toutes les manches n'ont pas été jouées ? En 1654, Blaise Pascal résout le problème et jette les bases du calcul des probabilités.

I Vocabulaire sur les ensembles

Le calcul des probabilités repose sur la théorie des ensembles. C'est pourquoi nous allons retraduire les notions ensemblistes en notions probabilistes.

1 Expérience aléatoire, Univers et Événement

Dans une urne contenant une boule rouge, une boule bleue et une boule verte, on tire successivement avec remise deux boules et l'on note les couleurs tirées. L'ensemble des opérations décrites est appelée *expérience aléatoire* et l'ensemble de toutes les issues possibles est appelé l'univers des possibles que l'on note Ω .

Définition 5.1: Univers des possibles

Soit une expérience aléatoire et Ω l'univers des possibles. On appelle événement (relativement à l'expérience) tout sous ensemble de Ω .

 Remarque: Nous supposons que l'univers Ω est un ensemble fini dans ce chapitre. Nous étudierons le cas où Ω est infini l'année prochaine.

 Exemple: Dans l'exemple précédent, si on note R, V, B les couleurs obtenues, on a

$$\Omega = \{(R; R); (R; B); (R; V); (B; R); (B; B); (B; V); (V; R); (V; B); (V; V)\}$$

(on obtient 9 couples car on effectue le tirage successivement avec remise).

- $A = \{(R; R); (R; B); (R; V)\}$ est un événement. On peut aussi décrire A à l'aide du phrase. A correspond à l'événement : « la première boule tirée est rouge ».
- $B = \{(B; V); (V; B)\}$ est un événement. B correspond à l'événement : « On a tiré une boule de couleur verte et une boule de couleur bleue ».
- $\emptyset$ est un événement appelé *événement impossible*.

Définition 5.2: Événements incompatibles

Si A et B sont deux événements, on dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

 Exemple: Dans l'exemple précédent A et B sont incompatibles, car il est impossible de tirer une boule rouge tout en tirant une boule verte et une bleue.

Définition 5.3: Événement contraire

Soit A un événement. On appelle événement contraire, l'événement noté $\bar{A}$ qui correspond au complémentaire de A dans Ω .

 Exemple: Dans, l'exemple précédent

$$\bar{A} = \{(B; R); (B; B); (B; V); (V; R); (V; B); (V; V)\}$$

Autrement dit la première boule tirée n'est pas rouge (donc elle est bleue ou verte).

Définition 5.4: Système complet d'événements

Soit n un entier non nul, et soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille de n événements.

On dit que $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un **système complet d'événements** si :

- ① $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, A_i \neq \emptyset$
- ② $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ tels que $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.
- ③ $\bigcap_{i=1}^n A_i = \Omega$.

 Remarque: Autrement dit pour que $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ soit un système complet d'événements, il faut et il suffit que les événements soient tous distincts de l'ensemble vide, soient deux-à-deux incompatibles, et leur réunion doit coïncider avec l'univers Ω .

 Exemple: On lance un dé non truqué, dans ce cas $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Soit A : « Obtenir un numéro pair », on a $A = \{2; 4; 6\}$.

Soit B : « Obtenir le numéro 3 ». On dit que B est un événement dit élémentaire car cet événement ne contient qu'une seule issue. $B = \{3\}$.

Enfin soit $C = \{1; 5\}$. A, B et C forment un système complet d'événements.

Propriété 5.1: Contraires et SCE

Soit A un événement, si $A \neq \emptyset$, alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événement.

2 Notion de Probabilité

Définition 5.5: Probabilité

On appelle probabilité définie sur Ω toute application P qui à un événement A, associe un nombre compris entre 0 et 1 vérifiant les deux propriétés suivantes :

- 1) $P(\Omega) = 1$
- 2) Si A et B sont deux événements incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Théorème 5.1: Probabilité et système complet d'événements

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements, on a

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

 Remarque: Avec le symbole somme ($\sum$), on

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Propriété 5.2

Si P est une probabilité alors on a toujours

$$P(\emptyset) = 0$$

3 Équiprobabilité**Définition 5.6: Équiprobabilité**

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, alors on dit qu'il y a équiprobabilité si

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

Ce qui nous permet d'énoncer le résultat « classique » suivant :

Théorème 5.2: Équiprobabilité

Lorsqu'il y a équiprobabilité, on a

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

 Remarque: On retient souvent

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas au total}}$$

4 Formules de Poincaré

Étudions maintenant une propriété importante en probabilité : la formule de Poincaré, ou formule du crible.

Théorème 5.3: Formule du crible

Si A et B sont deux événements quelconques, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

☞ Remarque: Il faut remarquer que les événements $(A \setminus B)$, $(B \setminus A)$ et $(A \cap B)$ forment un système complet d'événements (illustration).
Ce qui nous permet d'obtenir ainsi

Propriété 5.3

Si A et B sont deux événements quelconques, on a

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

On peut aussi énoncer la formule de Poincaré pour trois événements :

Théorème 5.4: Formule du crible (trois événement)

Si A, B et C sont trois événements quelconques, on a

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Enfin,

Théorème 5.5: Formule du crible (trois événement)

Si A, B, C et D sont quatre événements quelconques, on a

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) = & P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) \\ & - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\ & - P(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

II Probabilité conditionnelle

1 Définition et propriétés

Définition 5.7: Probabilité conditionnelle

Soit B un événement de probabilité non nulle.

On définit la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, par la relation

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

☞ Exemple: Dans une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, on prend dans cette urne successivement et sans remise deux boules.

Soit A l'événement « obtenir une boule blanche au second tirage »

et B l'événement « obtenir une boule noire au premier tirage ».

Calculons $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$.

On choisit deux boules. On choisit la première boule. Nous avons 5 choix. On en choisit une deuxième. Le tirage ayant lieu sans remise, il nous en reste 4.

On a donc

$$Card(\Omega) = 5 \times 4 = 20 \text{ d'où } P(B) = \frac{2 \times 4}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

L'événement $A \cap B$ correspond au fait d'obtenir une boule noire puis une boule blanche. C'est pourquoi

$$P(A \cap B) = \frac{2 \times 3}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

On a donc trois chances sur quatre d'obtenir une boule blanche au second tirage si on a tiré une boule noire au premier tirage. En effet, il reste trois boules blanches sur un total de quatre.

Propriété 5.4

Soit B un événement de probabilité non nulle. On a les propriétés suivantes :

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \text{ et } P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$

Démonstration:

Soit B un événement de probabilité non nulle. On a par définition

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

D'où le résultat.
De plus

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P_B(A)$$

■

2 Théorèmes

Théorème 5.6: Théorèmes des probabilités composées

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration:

Partons du membre de droite, et appliquons la définition d'une probabilité conditionnelle à toutes les probabilités conditionnelles que l'on rencontre

$$q_n = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$q_n = P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \dots \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

Les termes se simplifient deux à deux, il reste donc uniquement le dernier. C'est pourquoi

$$P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)$$

■

 Exemple: Dans une urne contenant 5 boules rouges et 2 boules vertes, on prend dans cette urne successivement et sans remise trois boules.

Soit A_i l'événement « obtenir une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage »

et $\overline{A_i}$ l'événement « obtenir une boule verte au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

Alors la probabilité de tirer dans cet ordre une boule rouge, puis une boule verte, puis une rouge est égale à

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(\overline{A_2}) \times P_{A_1 \cap \overline{A_2}}(A_3) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{21}$$

Théorème 5.7: Théorèmes des probabilités totales

Soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ un système complet d'événements. Soit A un événement. On a alors

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

ou encore

$$P(A) = P_{B_1}(A) \times P(B_1) + P_{B_2}(A) \times P(B_2) + \dots + P_{B_n}(A) \times P(B_n)$$

Démonstration:

Puisque $B_1, B_2, \dots, B_n$ est un système complet d'événements, alors les événements $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ sont incompatibles. On a donc

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

En appliquant la proposition 1, à toutes les probabilités de la forme $P(A \cap B_i)$, on obtient :

$$P(A) = P_{B_1}(A) \times P(B_1) + P_{B_2}(A) \times P(B_2) + \dots + P_{B_n}(A) \times P(B_n)$$

■

 Exemple: Dans une urne contenant 5 boules rouges et 2 boules vertes, on prend dans cette urne successivement et sans remise deux boules.

Soit A l'événement « obtenir une boule rouge au deuxième tirage »

et B l'événement « obtenir une boule rouge au premier tirage ».

On applique le théorème des probabilités totales au système couple d'événements $\{B; \overline{B}\}$. La probabilité de tirer une boule rouge au second tirage est donc

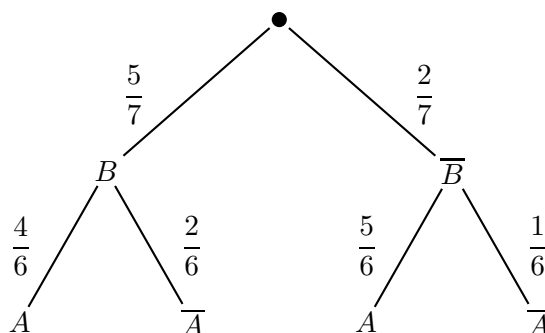
$$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B}) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

 Remarque: On peut retrouver ce résultat à l'aide d'un arbre binaire probabiliste.

On appelle arbre un schéma qui présente tous les cas possibles pour une expérience aléatoire donnée, ainsi que la probabilité correspondante.

Par exemple, dans le cas de l'expérience aléatoire précédente, on obtient l'arbre suivant :

On appelle noeud de l'arbre les différents points (qui correspondent aux événements A_1, A_2 , leurs contraires ainsi qu'à l'univers Ω qui a été représenté par un disque noir, on appelle ce dernier noeud racine de l'arbre). On dit qu'un arbre est binaire, si à chaque noeud il y a deux embranchements. Dans notre exemple, nous avons un arbre binaire de hauteur égale à deux.



Les probabilités qui sont inscrites entre la racine et les noeuds de profondeur 1 sont des probabilités « simples » (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas des probabilités conditionnelles).

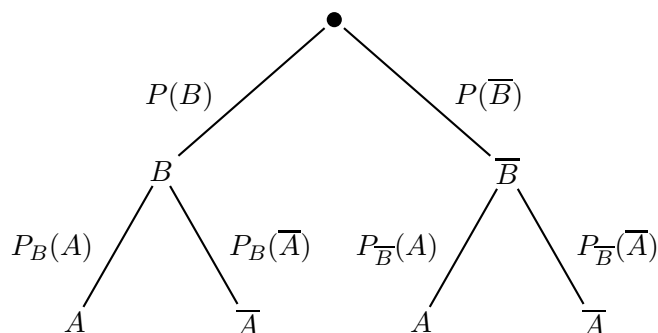
En effet, on a

$$P(B) = \frac{5}{7} \text{ et } P(\bar{B}) = \frac{2}{7}$$

Quant aux probabilités inscrites entre les noeuds de profondeur 1 et ceux de profondeur 2 (ainsi que les suivants dans le cas d'un arbre de hauteur quelconque), il s'agit de probabilités conditionnelles. En effet,

$$P_A(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ et } P_{\bar{B}}(A) = \frac{5}{6}$$

Dans le cas général, un arbre binaire de hauteur égale à deux se présente ainsi :



Théorème 5.8: Formule de Bayes

Soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ un système complet d'événements de probabilité non nulles. Soit A un événement. On a alors

$$P(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)}$$

 **Exemple:** Dans une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, on prend dans cette urne successivement et sans remise deux boules.

Soit A l'événement « obtenir une boule blanche au second tirage »

et B l'événement « obtenir une boule noire au premier tirage ».

La probabilité de tirer une boule noire au premier tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au second tirage est de

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{1}{2}$$

III Indépendance

1 Indépendance de deux événements

Définition 5.8: Indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

 Exemple: Dans une urne contenant 5 boules rouges et 2 boules vertes, on prend dans cette urne successivement et sans remise deux boules.

Soit A_i l'événement « obtenir une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage »

et $\bar{A}_i$ l'événement « obtenir une boule verte au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

La probabilité de tirer une boule rouge au second tirage est

$$P(A_2) = \frac{2}{7}$$

(voir exemple précédent) de plus

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{21}$$

Or

$$P(A_1) \times P(A_2) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{49} \neq \frac{5}{21}$$

C'est pourquoi les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants. En effet, les tirages s'effectuent sans remise, le premier tirage influe donc sur le deuxième.

Propriété 5.5: Indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si

$$P_B(A) = P(A) \text{ ou encore } P_A(B) = P(B)$$

 Exemple: Dans l'exemple précédent

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{6} \text{ et } P(A_2) = \frac{2}{7}$$

C'est pourquoi, les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants (on vient de le vérifier une deuxième fois).

Propriété 5.6: Indépendance et contraires

Soit A et B deux événements indépendants.

Dans ce cas,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A} \text{ et } \bar{B} \\ A \text{ et } \bar{B} \\ \bar{A} \text{ et } B \end{array} \right\} \text{ sont des événements indépendants.}$$

2 Indépendance mutuelle de n événements

Définition 5.9: Indépendance mutuelle

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une famille de n événements.

On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \text{ tels que } i \neq j, & P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \\ \forall (i, j, k) \in \{1, 2, \dots, n\}^3 \\ \text{tels que } i \neq j, i \neq k, j \neq k, & P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \\ \vdots & \vdots \\ P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) & = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n) \end{array} \right.$$

 Remarque: Voir exercices.

Chapitre 6

Suites arithmétiques et géométriques

I Suites Arithmétiques

1 Définition

Définition 6.1: Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

 Exemple: Soit un compte (sans intérêts) sur lequel il y a 100 euros. On dépose chaque année 10 euros. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n . (u_n) est une suite arithmétique de raison 10. Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 10$$

 Exemple: Soit un compte (sans intérêts) sur lequel il y a 100 euros. On dépense chaque année 7 euros. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n . (u_n) est une suite arithmétique de raison -7 . Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 7$$

 Remarque: La définition d'une suite arithmétique nous donne l'expression implicite de la suite. Essayons de trouver une expression explicite.

2 Expression de u_n en fonction de n , u_0 et r

Propriété 6.1: Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$$

Ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_k + (n-k)r$$

 Remarque: Cette proposition s'exprime en disant qu'un terme de la suite est égal au premier terme augmenté de la raison multipliée par le nombre de termes.

$$\underbrace{u_0 \quad \overset{+r}{\curvearrowright} \quad u_1 \quad \overset{+r}{\curvearrowright} \quad \cdots \quad \overset{+r}{\curvearrowright} \quad u_n}_{+nr}$$

 Exemple: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5. Si $u_0 = -7$ calculer u_5 et u_{100}

Réponse : $u_5 = u_0 + 5 \times 5 = -7 + 25 = 18$ et $u_{100} = -7 + 100 \times 5 = 500 - 7 = 493$

II Suites Géométriques

1 Définition

Définition 6.2: Suite géométrique

Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

 Exemple: Soit un compte à 3% sur lequel il y a 100 euros. . Soit u_n le montant sur le compte à l'année n . (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03. Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,03 \times u_n$$

 Remarque: La définition d'une suite géométrique nous donne l'expression implicite de la suite. Essayons de trouver une expression explicite.

2 Expression de u_n en fonction de n , u_0 et q

Propriété 6.2: Suite géométrique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison q . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \times u_0 = q^{n-1} \times u_1$$

Ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^{n-k} \times u_k$$

 Remarque: Cette proposition s'exprime en disant qu'un terme de la suite est égal au premier terme multiplié par de la raison à la puissance le nombre de termes.

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccc} & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ & \times q & & \times q & & \times q & \\ u_0 & & u_1 & & \cdots & & u_n \end{array}}_{\times q^n}$$

 Exemple: Soit (u_n) une suite géométrique de raison 1,03. Si $u_0 = 100$ calculer u_5 et u_{100}

Réponse : $u_5 = u_0 \cdot q^5 = 100 \cdot (1,03)^5$ et $u_{100} = u_0 \cdot q^{100} = 100 \cdot (1,03)^{100}$

III Sommes et symbole Σ

1 Définition du symbole Σ

Le symbole Σ va nous permettre d'écrire des sommes de manière ramassée.

Définition 6.3: Symbole $\sum$

La somme des n réels $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ se note $\sum_{i=1}^n u_i$.

Autrement dit, on a - par définition - l'égalité suivante :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

Remarque: L'avantage de cette notation est de supprimer les points de suspension. De plus la notation est beaucoup plus « ramassée », ce qui à long terme représente un sérieux avantage. Certes, il faut un peu de temps pour maîtriser suffisamment cette nouvelle notation, mais une fois maîtrisée elle s'avère plus pratique que la notation simple (avec les points de suspension).

Remarque: Le nombre de termes de la somme $\sum_{i=n_0}^n u_i$ est égal à $n - n_0 + 1$ (quelle que soit la suite (u_n)). Il ne faut pas oublier d'ajouter 1 à la différence $n - n_0$.

En particulier la somme $\sum_{i=0}^n u_i$ contient $n + 1$ termes.

Propriété 6.3: Linéarité de la somme

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques, et k un réel. On a

$$\sum_{i=0}^n (u_i + v_i) = \sum_{i=0}^n u_i + \sum_{i=0}^n v_i \text{ et } \sum_{i=0}^n (k \cdot u_i) = k \cdot \sum_{i=0}^n u_i$$

Remarque: Parfois certaines sommes peuvent s'exprimer comme une différence de deux termes consécutifs d'une suite. Dans ce cas, tous les termes s'annulent sauf le premier et le dernier.

On parle dans ce cas de *télescope additif* (ou principe des dominos).

Soit (u_n) une suite quelconque, on a

$$\sum_{i=0}^n u_{i+1} - u_i = u_{n+1} - u_0$$

Ou encore si on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} v_0 & = & u_1 - u_0 \\ v_1 & = & u_2 - u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & = & u_{n+1} - u_n \end{array}$$

En simplifiant deux à deux les termes, et en les ajoutant, on obtient

$$\begin{array}{rcl} v_0 & = & \cancel{u_1} - u_0 \\ v_1 & = & u_2 - \cancel{u_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & = & u_{n+1} - \cancel{u_n} \\ \hline \sum_{i=0}^n v_i & = & u_{n+1} - u_0 \end{array}$$

2 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 6.1: Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{(u_0 + u_n) \cdot (n+1)}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au demi-produit du nombre de termes de cette somme par la somme des termes extrêmes.

Démonstration:

Ce résultat se montre par récurrence. (Voir chapitre sur les raisonnements par récurrence).

■

3 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 6.2: Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Si $q = 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = n \cdot u_0$$

Sinon, lorsque $q \neq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Si $q = 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$$

C'est pourquoi, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_0 = u_0 \cdot \sum_{k=0}^n 1 = n \cdot u_0$$

Sinon, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \cdot q^n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_0 \cdot q^k = u_0 \cdot \sum_{k=0}^n q^k$$

C'est pourquoi, nous obtiendrons le résultat souhaité, si l'on parvient à montrer l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On montrera de façon équivalente (produit en croix) que

$$\forall q \neq 1, \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$$

Or

$$\forall q \neq 1, \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) \times (1-q) = 1 - q + q - q^2 + \dots + q^n - q^{n+1}$$

Il s'agit d'un télescopage additif, tous les termes se simplifient, sauf le premier et le dernier.

$$\begin{array}{rcl} q^0 \cdot (1-q) & = & 1-q \\ q^1 \cdot (1-q) & = & q - q^2 \\ \vdots & & \vdots \\ q^n \cdot (1-q) & = & q^n - q^{n+1} \\ \hline \left(\sum_{i=0}^n q^i \right) \cdot (1-q) & = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

C'est pourquoi

$$\forall q \neq 1, \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$$

D'où le résultat. ■

IV Suites arithmético-géométriques

1 Définition et Exemples

Définition 6.4: Suite arithmético-géométrique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = au_n + b$$

 **Remarque:** On constate la chose suivante :

- Si $a = 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n + b$$

Autrement dit, (u_n) est une suite arithmétique de raison b .

- Si $b = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = au_n$$

Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison a .

 **Exemple:** On veut placer 100 euros sur un compte rémunéré à 5 pour cent. Mais chaque année la banque réclame 3 euros de frais. Si on note $u_0 = 100$ que vaut u_{n+1} en fonction de u_n ?

$u_1 = 1,05 \cdot u_0 - 3 = 105 - 3 = 102$. De même

$$u_{n+1} = 1,05 \cdot u_n - 3$$

Cette suite est arithmético-géométrique avec $a = 1.05$ et $b = -3$

2 Méthode pour exprimer u_n en fonction de n .

Dans le cas où $a \neq 1$, la méthode est la suivante :

On cherche le point fixe c'est à dire la valeur initiale de la suite pour laquelle la suite reste constante. C'est-à-dire

$$u_{n+1} = u_n \text{ ou } au_n + b = u_n$$

Ici $1,05 \cdot u_n - 3 = u_n$ donc $0,05u_n - 3 = 0$

$0,05 \cdot u_n = 3$ d'où

$$u_n = \frac{3}{0,05} = \frac{300}{5} = 60$$

On note souvent $\alpha = 60$. On résout l'équation sous la forme $\alpha = a \cdot \alpha + b$

$$\alpha = 1,05 \cdot \alpha - 3 \Rightarrow 0,05 \cdot \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 60$$

On pose $v_n = u_n - \alpha$. Ici $v_n = u_n - 60$. Cette suite est géométrique. On va le montrer

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 60 = 1,05 \cdot u_n - 3 - 60 = 1,05 \cdot u_n - 63$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1,05 \cdot u_n - 63}{u_n - 60} = 1,05 \cdot \frac{u_n - 60}{u_n - 60} = 1,05$$

Ensuite on exprime v_n en fonction de n .

$$v_n = q^n \cdot v_0 = (1,05)^n \cdot 40 \text{ donc } u_n = v_n + 60 = (1,05)^n \cdot 40 + 60$$

Résumé de la méthode : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de la forme

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b$$

Pour exprimer u_n en fonction de n on procède par étapes :

1^{ère} étape : Recherche du point fixe α tel que $\alpha = a \cdot \alpha + b$

2^{ème} étape : On pose $v_n = u_n - \alpha$ et on montre que v_n est géométrique de raison a

3^{ème} étape : On exprime v_n puis u_n en fonction de n

3 Démonstration de la validité de la méthode

Dans les exercices on appliquera la méthode en détaillant les calculs importants.

Cette méthode repose sur les résultats suivants, qui ne sont pas supposés connus (c'est pourquoi, on les retrouvera lors de chaque exercice) :

Première étape : Recherche du point fixe.

Le point fixe α vérifie la relation suivante

$$\alpha = a\alpha + b \Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{1-a}$$

On peut bien diviser par $1 - a$ puisque $a \neq 1$.

Le point fixe existe donc, et est unique.

Deuxième étape : Étude de la suite auxiliaire.

On pose $v_n = u_n - \alpha$.

On va désormais montrer que cette suite auxiliaire est une suite géométrique de raison a .

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha$$

En remplaçant α par $\frac{b}{1-a}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b-ab-b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a}$$

En factorisant par a , on obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = a \cdot \left(u_n - \frac{b}{1-a} \right) = a \cdot (u_n - \alpha) = a \cdot v_n$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison a .

Troisième étape : Expression de v_n et de u_n en fonction de n .

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison a , on a

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \cdot a^n$$

Or, $v_n = u_n - \alpha$, ce qui implique que $u_n = v_n + \alpha$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = (u_0 - \alpha) \cdot a^n + \alpha$$

En remplaçant finalement α par sa valeur, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

Chapitre 7

Limites d'une fonction

La notion de limites est essentielle dans l'étude des fonctions. En effet, connaître les limites d'une fonction donnera des indications aussi importantes que celles que l'on obtient en connaissant son sens de variation.

Pour comprendre la notion de limite, il faut partir de la signification intuitive de l'expression « tendre vers ». Nous allons développer cette signification, afin d'en donner une formulation plus précise.

 Contexte historique: La notion de limite a mis longtemps à être formulée avec précision. Il a fallu attendre le milieu du XIX^{ème} siècle pour qu'une définition satisfaisante de cette notion. C'est le mathématicien allemand Karl Weierstrass qui la formule.

I Notion de limite

1 Illustration

- Soit la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x^2$$

On va étudier certaines valeurs de f au voisinage de 0.

x	1	0,5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	0	-10^{-3}	-10^{-2}	-10^{-1}	-0,5	-1
$f(x)$	1	0,25	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	0	10^{-6}	-10^{-4}	-10^{-2}	0,25	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus x^2 se rapproche de 0.

On dira que x^2 tend vers 0, lorsque x tend vers 0.

On note $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

- Soit la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{x^2}$$

On va étudier certaines valeurs de f au voisinage de 0.

x	1	0,5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	-10^{-3}	-10^{-2}	-10^{-1}	-0,5	-1
$f(x)$	1	4	10^2	10^4	10^6	10^6	10^4	10^2	4	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus $\frac{1}{x^2}$ s'éloigne de 0 en devenant de plus en plus grand.

On dira que $\frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers 0.

On note $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

- Soit la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{x^2}$$

On va étudier certaines valeurs de f au voisinage de $+\infty$.

x	1	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}

On constate que plus x s'éloigne de 0 en devenant plus grand, plus $\frac{1}{x^2}$ se rapproche de 0.

On dira que $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

- Soit la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x^2$$

On va étudier certaines valeurs de f au voisinage de $+\infty$.

x	1	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	1	10^2	10^4	10^6	10^8

On constate que plus x s'éloigne de 0 en devenant plus grand, plus x^2 s'éloigne de 0 en devenant plus grand.

On dira que x^2 tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $+\infty$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

2 Définition

Nous allons traduire les différents résultats de l'illustration en terme de limites.

Définition 7.1: Limite finie en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant un réel x_0 . Soit ℓ un réel
On dira que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 si $f(x)$ se rapproche de ℓ aussi près que l'on veut lorsque x se rapproche de x_0 .

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x_0} f = \ell$

Définition 7.2: Limite infinie en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant un réel x_0 .

On dira que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 si $f(x)$ est aussi grand (resp. aussi petit) que l'on veut lorsque x se rapproche de x_0 .

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$)

Interprétation graphique :

Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ alors la courbe représentative de f admet ce qu'on appelle une asymptote verticale en x_0 .

En effet, on appelle asymptote toute courbe qui se rapproche de la courbe de f . Ici, l'asymptote est une **droite verticale**. Elle a pour équation $x = x_0$

Illustration :

Définition 7.3: Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $I = [a; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty; a]$). Soit ℓ un réel

On dira que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $f(x)$ se rapproche de ℓ aussi près que l'on veut lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$)

Interprétation graphique :

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ alors la courbe représentative de f admet ce qu'on appelle une asymptote horizontale.

L'équation de l'asymptote est $y = \ell$.

Définition 7.4: Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $I = [a; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty; a]$).

On dira que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $f(x)$ s'éloigne de 0 en devenant aussi grand que l'on veut lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$).

De même, pour une limite égale à $-\infty$, lorsque $f(x)$ devient aussi petit que l'on veut en s'éloignant de 0.

Définition 7.5: Limite à gauche et à droite de x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant un réel x_0 . Soit ℓ un réel

On dira que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 à droite (resp. à gauche) si $f(x)$ se rapproche de ℓ aussi près que l'on veut lorsque x se rapproche de x_0 avec $x \geq x_0$ (resp. $x \leq x_0$).

On note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$)

II Limites de références

1 Polynômes, fractions rationnelles et racines en x_0

Propriété 7.1: S

Soit f un polynôme, une fraction rationnelle, ou une racine carrée, ou une composée de ses fonctions. Soit x_0 un élément du domaine alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

 Exemples: On a

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 2x + 7} = \sqrt{3^2 - 6 + 7} = \sqrt{10}$$

De même

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 2} = \frac{3 - 2 + 1}{-1 + 2} = \frac{2}{1} = 2$$

2 x^n en l'infini**Propriété 7.2**

La limite de x^n en l'infini est infinie.

Pour connaître le signe en $-\infty$, il faut connaître la parité de n

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair ; } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

 Exemples: On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{37} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{14} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 = -\infty$$

3 x^n en l'infini**Propriété 7.3**

La limite de $\sqrt{x}$ en l'infini est infinie.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

4 $\frac{1}{x^n}$ en l'infini**Propriété 7.4**

La limite de $\frac{1}{x^n}$ en l'infini est nulle.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

 Exemples: On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{22}} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{21}} = 0$$

5 $\frac{1}{x^n}$ en 0**Propriété 7.5**

La limite de $\frac{1}{x^n}$ en 0 est infinie. Pour connaître le signe en 0 (voire en 0^+ et 0^-), il faut connaître la parité de n

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair ; si } n \text{ est impair } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

 Exemples: On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{22}} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{21}} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{21}} = +\infty$$

6 Limite d'une fonction constante

Propriété 7.6

La limite d'une fonction constante quelque soit l'endroit est égale à la constante en question. Autrement dit

$$\forall (k, x_0) \in \mathbb{R}^2, \lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$$

 Exemples: On a

$$\lim_{x \rightarrow -9} 7 = 7; \lim_{x \rightarrow +\infty} -5 = -5; \lim_{x \rightarrow -\infty} 11 = 11$$

III Opérations sur les Limites

1 Somme

Propriété 7.7

On obtient les limites suivantes pour la somme de deux fonctions :

$\lim f \setminus \lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

 Remarque: Dans certains cas, on ne peut pas conclure, on dit que l'on obtient une forme indéterminée.

 Exemple: Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \frac{1}{x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors en ajoutant les limites on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \frac{1}{x} = -\infty$$

2 Produit

Propriété 7.8

On obtient les limites suivantes pour le produit de deux fonctions :

$\lim f \setminus \lim g$	0	$\ell' (\neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	F.I.	F.I.
$\ell (\neq 0)$	0	$\ell \times \ell'$	∞	∞
$+\infty$	F.I.	∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	F.I.	∞	$-\infty$	$+\infty$

 Exemple: Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3) \times \frac{1}{x^2}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3) = 2 \times 0 - 3 = -3$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, alors en multipliant les limites on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3) \times \frac{1}{x^2} = -\infty$$

3 Quotient

Propriété 7.9

On obtient les limites suivantes pour le quotient de deux fonctions :

$\lim f \backslash \lim g$	0	$\ell' (\neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
0	F.I.	0	0	0
$\ell (\neq 0)$	∞	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	∞	∞	F.I.	F.I.
$-\infty$	∞	∞	F.I.	F.I.

 Exemple: Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2 + 7x + 9}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 = -3$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 7x + 9 = +\infty$, alors en divisant les limites on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2 + 7x + 9} = 0$$

4 Comment lever une indétermination ?

Lorsqu'on obtient une forme indéterminée, cela ne signifie pas nécessairement qu'il n'y a pas de limite. Lorsqu'il y a une limite que l'on peut calculer, on dit qu'on lève l'indétermination lorsqu'on ré-écrit la fonction à étudier de telle sorte que l'on puisse appliquer les résultats du cours.

Premier cas : Si f est un polynôme et qu'il y a une forme indéterminée lorsqu'on étudie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré. Par exemple, si on étudie la fonction $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$, alors on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 7$$

D'où on obtient une forme indéterminée de la forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour lever l'indétermination, on factorise par x^4 (qui est le terme de plus haut degré).

On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x^4 \cdot \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{7}{x^4} \right) = x^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^4} \right)$$

Or on obtient les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^4} = 0$$

Par somme, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^4} = 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$.

Donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De même en $-\infty$.

Deuxième cas : Si f est une fraction rationnelle (c'est-à-dire le quotient de deux polynômes) et qu'il y a une forme indéterminée lorsqu'on étudie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré (au numérateur et au dénominateur). Par exemple, si on étudie la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 7}{2x^2 + x + 8}$, alors on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 7 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 8 = +\infty$$

D'où on obtient une forme indéterminée de la forme « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour lever l'indétermination, on factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur (on pourrait aussi factoriser par $2x^2$ au dénominateur, au choix).

On obtient

$$\forall x \in D_f ; f(x) = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

Or on obtient les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} = 2$$

Par quotient, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{1}{2}$.

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

De même en $-\infty$.

 **Remarque:** Ce dernier cas peut se généraliser lorsqu'on a des fractions contenant aussi des racines carrées (voir exercice 5).

Troisième cas : Si f fait intervenir des racines carrées, on peut parfois lever une indétermination en multipliant par la quantité conjuguée.

 Exemple: Soit $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$, alors on obtient une forme indéterminée de la forme « $+\infty - \infty$ ».

En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$\forall x \geq 1 ; f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, d'où

$$\forall x \geq 1 ; f(x) = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$ alors, par quotient on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$$

5 Étude des limites d'une fraction rationnelle en un pôle

Soit f une fraction rationnelle et x_0 une valeur interdite pour f (on dit aussi que x_0 est un pôle). x_0 annule le dénominateur, c'est pourquoi on obtient généralement une limite infinie en x_0 , sauf si x_0 annule aussi le numérateur. Sinon, on obtient une asymptote verticale.

Si on obtient une limite infinie, pour pouvoir trancher entre $+\infty$ et $-\infty$, on étudie le signe de $f(x)$ (et non pas celui de f' attention !).

 **Exemple:** Soit $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$. Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x + 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$$

D'où la limite de la fonction f en 1 est infinie.

Pour connaître le signe de la limite, on étudie le signe de f .

Puisque le discriminant du polynôme $x^2 + 2x + 3$ vaut $\Delta = 4 - 12 < 0$, alors ce polynôme est toujours positif. $x - 1$ quant à lui s'annule en $x = 1$.

C'est pourquoi, on obtient le signe suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$		+	+
$x - 1$		-	+
$f(x)$		-	+

D'où on obtient les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

6 Asymptotes

Rappel : On a les résultats suivants :

Propriété 7.10: Asymptote verticale

La droite (D) d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f (dans un repère orthonormé) si et seulement si l'un des cas suivantes se produit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \end{array} \right.$$

Propriété 7.11: Asymptote horizontale

La droite (D) d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f (dans un repère orthonormé) si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

Chapitre 8

Dérivées d'une fonction

La notion de dérivée est une notion essentielle pour étudier une fonction. Dans ce chapitre, nous étudierons les définitions du nombre dérivée d'une fonction, ainsi que la fonction dérivée. Ensuite nous étudierons les opérations algébriques sur les dérivées et les dérivées usuelles. Finalement nous verrons que l'utilité principale des dérivées est de nous permettre de trouver le sens de variation d'une fonction.

 **Contexte historique:** A la fin du XVII^{ème} siècle, les mathématiciens Isaac Newton et Gottfried Leibniz inventent le « calcul infinitésimal » à peu près au même moment (entre 1670 et 1690 pour Newton et 1684 pour Leibniz). Ce nouveau domaine des mathématiques comporté l'étude des dérivées ainsi que des intégrales.

I Notion de dérivée

Définition 8.1: Dérivabilité d'une fonction et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$.

Si le taux d'accroissement de la fonction f en x_0 admet une limite ℓ quand x tend vers x_0 c.a.d

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

alors on dit que f est dérivable en x_0 et on note $\ell = f'(x_0)$.

 **Remarque:** On peut aussi écrire le nombre dérivée $f'(x_0)$, lorsqu'il existe, de la façon suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition 8.2: Fonction dérivée

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle. On note la fonction dérivée f' .

 **Exemple:** Soit f la fonction définie par $f(x) = x$

Pour tout x_0 appartenant à $\mathbb{R}$ le taux d'accroissement de la fonction f en x_0 vaut

$$\tau_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Donc la dérivée f' de la fonction f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1$$

Interprétation graphique : Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 .

On appelle tangente à la courbe représentative de f au point $M(x_0; f(x_0))$ la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Propriété 8.1: Équation d'une tangente

Dans ces conditions, l'équation de la tangente T_{x_0} à la courbe au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

 Exemples: Voir la suite du cours

II Opérations sur les dérivées et dérivées usuelles

1 Opérations algébriques sur les dérivées

Propriété 8.2: Opérations sur les dérivées

Soit I un intervalle, on a les propriétés suivantes :

f	f'	Remarques
$u + v$	$u' + v'$	u et v dérivables sur I
$k \cdot u$	ku'	u dérivable sur I
uv	$u'v + uv'$	u et v dérivables sur I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v dérivable et non nulle sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	u et v dérivables sur I et v non nulle

2 Dérivées usuelles

Propriété 8.3: Dérivée de x^n

Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on obtient les dérivées suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\vdots$	$\vdots$
x^n	nx^{n-1}

 Remarque: Pour dériver une fonction polynôme il vaut souvent mieux utiliser la forme développée.

 Exemple: Calculer de deux façons différentes la dérivée de $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 9x)$

- Première méthode : On développe la fonction f avant de la dériver.

$$f(x) = x^5 + 9x^4 - x^3 - 9x^2 \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 5x^4 + 36x^3 - 3x^2 - 18x$$

- Deuxième méthode : On dérive f en premier

$$\begin{aligned} u(x) &= x^3 - x \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 1 \\ v(x) &= x^2 + 9x \Rightarrow v'(x) = 2x + 9 \end{aligned}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = f'(x) = (3x^2 - 1) \cdot (x^2 + 9x) + (x^3 - x) \cdot (2x + 9)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 5x^4 + 36x^3 - 3x^2 - 18x$$

Propriété 8.4: Dérivée de $\frac{1}{x^n}$

La fonction inverse définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* , f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

De plus on a les dérivées suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

 Exemple: Calculer de deux manières la dérivée de $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 7}{x^4}$

- Première méthode : On utilise la formule de dérivée d'un quotient

$$\begin{aligned} u(x) &= 3x^2 - 5x + 7 \Rightarrow u'(x) = 6x - 5 \\ v(x) &= x^4 \Rightarrow v'(x) = 4x^3 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) = \frac{(6x - 5) \cdot (x^4) - (3x^2 - 5x + 7) \cdot (4x^3)}{(x^4)^2} = -\frac{6x^2 - 15x + 28}{x^5}$$

- Deuxième méthode : On transforme ce quotient en somme

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; f(x) = \frac{3x^2}{x^4} - \frac{5x}{x^4} + \frac{7}{x^4} = \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{15}{x^4} - \frac{28}{x^5}$$

Propriété 8.5: Dérivée de $\sqrt{x}$

La fonction racine carré définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

 Exemple: Calculer la dérivée de $f(x) = 3x\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} u(x) &= 3x \Rightarrow u'(x) = 3 \\ v(x) &= \sqrt{x} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = (3) \cdot (\sqrt{x}) + (3x) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{x}$$

3 Dérivées de fonctions composées

Propriété 8.6

fonction définie et dérivable sur I et à valeurs dans J. Soit v une fonction dérivable sur J. Avec ces hypothèses la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I , (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Propriété 8.7

Soit I un intervalle et u une fonction définie sur I

On déduit de la proposition précédente les dérivées suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$	Remarques
$[u(x)]^n$	$nu'(x) \cdot [u(x)]^{n-1}$	u dérivable sur I
$\frac{1}{[u(x)]^n}$	$-\frac{nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$	u dérivable et non nulle sur I
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	u dérivable et strictement positive sur I

 Exemple:

1. Calculer la dérivée de $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 16x - 13)^{99}$.

En posant, $u(x) = x^3 - 3x^2 + 16x - 13 \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 6x + 16$.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 99 \cdot (3x^2 - 6x + 16) \cdot (x^3 - 3x^2 + 16x - 13)^{98}$$

2. Calculer la dérivée de $f(x) = 25 \cdot (x^4 - 3x + 7)^{32}$.

En posant, $u(x) = x^4 - 3x + 7 \Rightarrow u'(x) = 4x^3 - 3$.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 25 \cdot 32 \cdot (4x^3 - 3) \cdot (x^4 - 3x + 7)^{31}$$

3. Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{-3}{(x^2 + 3x + 5)^5}$.

En posant, $u(x) = x^2 + 3x + 5 \Rightarrow u'(x) = 2x + 3$.

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{(-3) \cdot (-5)}{(x^2 + 3x + 5)^6} = \frac{15}{(x^2 + 3x + 5)^6}$$

4. Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 7}$.

En posant, $u(x) = 2x^2 + 5x + 7 \Rightarrow u'(x) = 4x + 5$.

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{4x + 5}{2 \cdot \sqrt{2x^2 + 5x + 7}}$$

III Application des dérivées

1 Dérivées et sens de variation

Théorème 8.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la dérivée f' est (strictement) positive alors f est (strictement) croissante.
- Si la dérivée f' est (strictement) négative alors f est (strictement) décroissante.

 Exemples:

1. Trouver les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + 1$$

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = x^2 - x - 1$$

f' est un polynôme du second degré. Calculons son discriminant :

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

d'où on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

2. Trouver les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - x^2 + x - 1)^{122}$$

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, car f est un polynôme.

De plus, on pose $u(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 122 \cdot (3x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)^{121}$$

u' est un polynôme du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta = 4 - 12 < 0$ D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} ; u'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0$$

Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

On remarque que $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. D'où 1 est racine de P.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & - & x^2 & + & x & - & 1 \\ -(x^3 & - & x) & & & & \\ \hline & & & & x & - & 1 \\ & & & & -(x & - & 1) \\ & & & & & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x & - & 1 \\ x^2 & & \\ & & +1 \end{array}$$

En conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 > 0$$

D'où on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$3x^2 - 2x + 1$	+	+	+
$(x - 1) \cdot (x^2 + 1)$	-	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

3. Trouver les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 14x^2 + 61x - 84)^{111}$$

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, car f est un polynôme.

De plus, on pose $u(x) = x^3 - 14x^2 + 61x - 84 \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 28x + 61$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 122 \cdot (3x^2 - 28x + 61) \cdot (x^3 - 14x^2 + 61x - 84)^{110}$$

u' est un polynôme du second degré.

Calculons son discriminant : $\Delta = 28^2 - 4 \cdot 3 \cdot 61 = 784 - 732 = 52 > 0$.

Le polynôme $3x^2 - 28x + 61$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{28 - \sqrt{52}}{6} = \frac{14 - \sqrt{13}}{3}, \quad x_2 = \frac{28 + \sqrt{52}}{6} = \frac{14 + \sqrt{13}}{3}$$

Posons $P(x) = x^3 - 14x^2 + 61x - 84$ (indication : on donne une racine r de P : $r = 3$)

Calculons $P(3)$.

$$P(3) = 3^3 - 14 \cdot 3^2 + 61 \cdot 3 - 84 = 27 - 126 + 183 - 84 = 210 - 210 = 0.$$

3 est bien une racine du polynôme P, donc on peut factoriser par $x - 3$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & - & 14x^2 & + & 61x & - & 84 & & x & - & 3 \\
 -(x^3 & - & 3x) & & & & & & x^2 & & \\
 \hline
 & & -11x^2 & + & 61x & - & 84 & & & & \\
 & -(& -11x^2 & + & 33x &) & & & & -11x & \\
 & & & & 28x & - & 84 & & & & \\
 & & & & -(28x & - & 84) & & & & +28 \\
 & & & & & & 0 & & & &
 \end{array}$$

En conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = (x-3)(x^2 - 11x + 28)$$

On peut calculer le discriminant du polynôme $x^2 - 11x + 28$ et on obtient $\Delta = 121 - 112 = 9 > 0$
D'où le polynôme $x^2 - 11x + 28$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{9}}{2} = \frac{11 - 3}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{11 + \sqrt{9}}{2} = \frac{11 + 3}{2} = 7$$

On obtient donc la factorisation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; P(x) = x^3 - 14x^2 + 61x - 84 = (x-3)(x-4)(x-7)$$

D'où on obtient le tableau suivant (à corriger) :

x	$-\infty$		3		4		7		$+\infty$
$3x^2 - 14x + 61$		+		+		+		+	
$(x^3 - 14x^2 + 61x - 84)^{110}$		+	0	+	0	+	0	+	
$f'(x)$		+	0	+	0	+	0	+	
$f(x)$									

4. Trouver les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-4}$$

5. Trouver les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

2 Extrema

Définition 8.3: Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.

On dit que $f(x_0)$ est un extremum local si $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

$f(x_0)$ est un maximum local, si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x voisin de x_0 .

$f(x_0)$ est un minimum local, si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x voisin de x_0 .

☞ Remarques: Si on compare une fonction avec le relief d'un massif de montagnes, le pic de chaque montagne (même la plus petite) est un maximum local. Le pic de la plus haute montagne

est appelé maximum *global*.

« Maximum » et « minimum » sont des mots d'origine latine. Ils peuvent garder leur pluriel d'origine. On parle de maxima ou de maximums et de minima ou de minimums (au pluriel).

Propriété 8.8: Lien entre extremum local et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$.

Soit $x_0 \in]a; b[$. Si la dérivée de f s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur $]a; b[$.

✎ Exemples: • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 91)^{29}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 29 \cdot 2x \cdot (x^2 + 91)^{28}$$

Or $(x^2 + 91)^{28}$ est strictement positif, quelque soit x réel (en particulier 28 est pair et $\Delta < 0$). f' est donc du signe de x . On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		91^{29}		$+\infty$

D'où 91^{29} est un minimum pour la fonction f . Ce minimum est atteint en 0.

• De même soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x^2 + 4x - 3)^{14}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 14 \cdot (-2x + 4) \cdot (-x^2 + 4x - 3)^{13} = -30(x - 2) \cdot (-x^2 + 4x - 3)^{13}$$

Cherchons les valeurs qui annulent les différents polynômes :

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- Quand a-on $-x^2 + 4x - 3 = 0$?

Calculons le discriminant de ce polynôme

$$\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$$

Il y a donc deux valeurs qui annulent ce polynôme :

$$x_1 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3; x_2 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

d'où on obtient le tableau suivant :

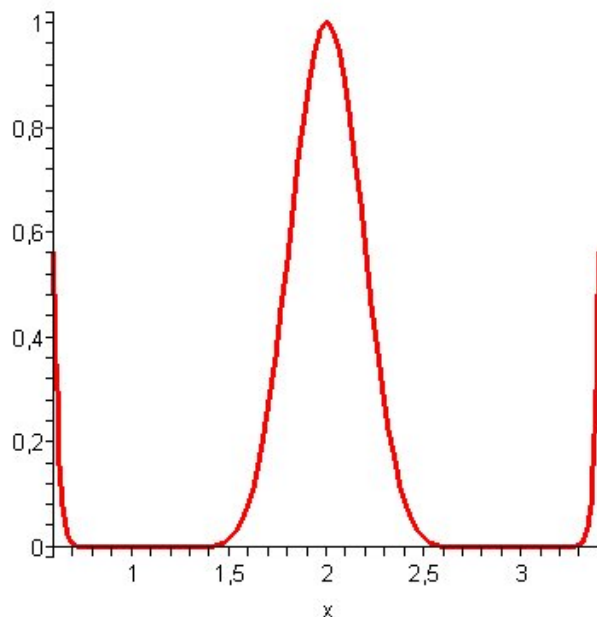
x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$-30(x - 2)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$		0	$-$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0		1		0		

D'où f admet un maximum local et deux minima locaux.

Or $f(1) = f(3) = 0$ et $f(2) = (-4 + 8 - 3)^{14} = 1^{14} = 1$

D'où 1 est le maximum local de f et 0 est le minimum local (on peut même montrer que ce minimum est global).

Voici la courbe représentative de f :



Remarque: L'hypothèse de changement de signe est importante. Car si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, on a

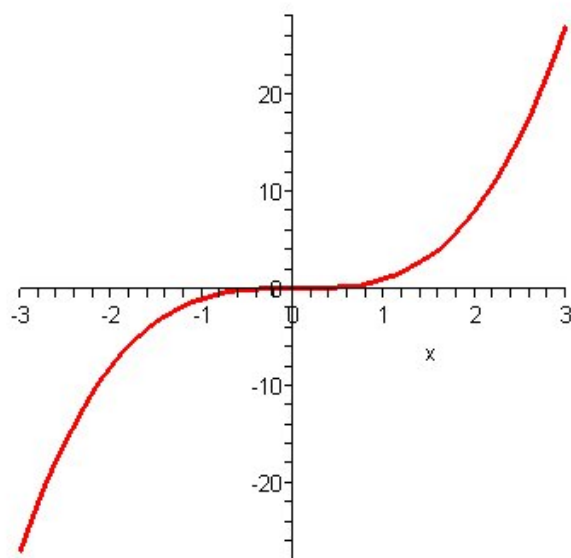
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$$

Donc f' s'annule en 0 mais 0 n'est ni un minimum ni un maximum.

En effet on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

Et la courbe suivante (appelée serpentine) :



IV Étude d'une fonction

On dit qu'on a étudié une fonction f lorsqu'on connaît les propriétés importantes de f . Pour cela on étudie le domaine de définition, le sens de variation, les limites, les asymptotes et tangentes remarquables. Une étude peut se terminer par le tracé de la courbe.

 Exemple: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Chapitre 9

Statistiques univariées

I Vocabulaire

1 Population, individus et échantillon

Définition 9.1: Population, individus et échantillon

L'ensemble des éléments dont on étudie les données s'appelle *population*, notée Ω . Ses éléments sont appelés *individus*, notés ω . Un *échantillon* est une liste finie d'individus de la population sur lesquels on effectue des observations. On appelle *taille* de l'échantillon, le nombre de ses éléments que l'on note n .

 Exemples: On s'intéresse aux ménages français. La population est donc l'ensemble des ménages français. Les individus sont les différents ménages (un ménage est un individu dans cet exemple). Un échantillon est une liste finie de ménages.

2 Caractères

Définition 9.2: Caractère , variable statistique

Ce qui est observé est appelé *caractère*, ou *variable statistique*. Si on le note X , alors on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs qu'il prend.

 Exemples: Voici quelques exemples de caractères : le chiffre d'affaire d'une entreprise, l'âge d'une personne , la couleur des cheveux d'une personne etc...

Définition 9.3: Caractère qualitatif, caractère quantitatif

Si le caractère X prend des valeurs numériques, on dit qu'il est quantitatif sinon, il est dit qualitatif.

 Exemples: Le chiffre d'affaire d'une entreprise ou l'âge d'une personne sont des caractères qualitatifs. La couleur des cheveux d'une personne est un caractère quantitatif.

Définition 9.4: Caractère discret, caractère continu

Si un caractère X prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs, alors X est un *caractère discret*. Sinon on dit que X est un *caractère continu*.

 Exemples: L'âge peut-être considéré comme un caractère continu. Dans ce cas, on s'intéresse à des intervalles d'âge que l'on appelle *classe* d'âges. Le nombre d'enfants d'un foyer est un caractère discret.

II Statistiques élémentaires

Dans cette partie, nous nous intéresserons qu'à des caractères quantitatifs.

1 Effectif, fréquence, fréquence cumulée

Définition 9.5: Effectif, fréquence, fréquence cumulée

Soit un caractère X , et un échantillon de taille n .

On appelle **effectif** de la valeur x_i ou de la classe $[x_i, x_{i+1}[$ le nombre d'individus ω de l'échantillon tels que $X(\omega) = x_i$ ou tels que $X(\omega) \in [x_i, x_{i+1}[$. On le note n_i .

On appelle **fréquence** de la valeur x_i ou de la classe $[x_i, x_{i+1}[$, le réel f_i défini par la relation

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Si les x_i ou les classes sont classés par ordre croissant, on appelle **fréquence cumulée** la somme $\sum_{k=1}^i f_k$

 Exemples: Voici deux exemples de séries statistiques.

Nombre X de voitures vendues par un concessionnaire :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	11	25	100	25	25	12	2

Ici les individus sont les jours.

Ou (deuxième exemple) Y l'âge des habitants d'un village.

y_i	$[0, 10[$	$[10, 18[$	$[18, 25[$	$[25, 35[$	$[35, 55[$	$[55, 75[$	$[75, +\infty[$
n_i	75	100	325	500	300	150	50

On peut dans les deux cas calculer les fréquences et les fréquences cumulées :

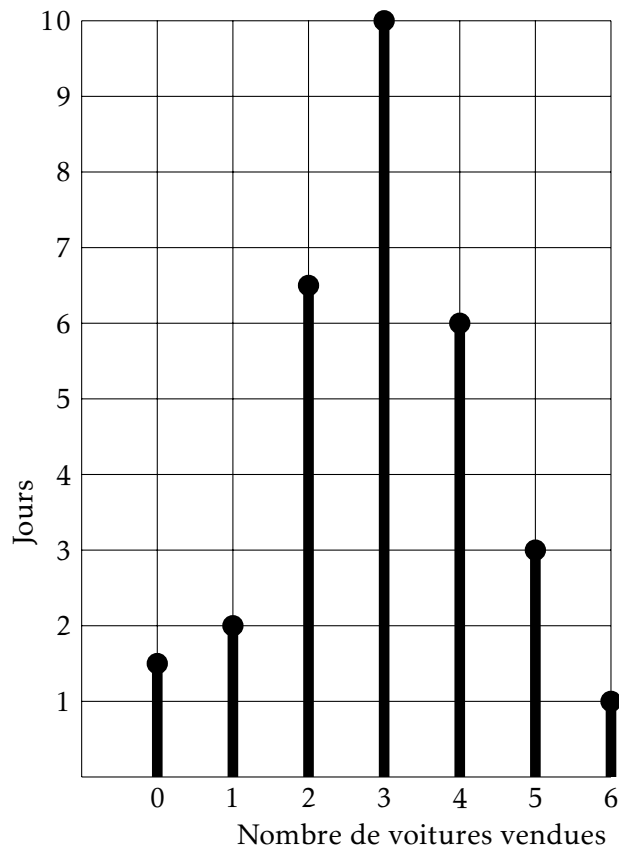
x_i	0	1	2	3	4	5	6	Total
n_i	11	25	100	25	25	12	2	200
f_i	$\frac{11}{200}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{1}{100}$	1
f_i (valeur décimale)	0,055	0,125	0,5	0,125	0,125	0,06	0,01	1
fréquences cumulées	0,055	0,18	0,305	0,805	0,93	0,99	1	

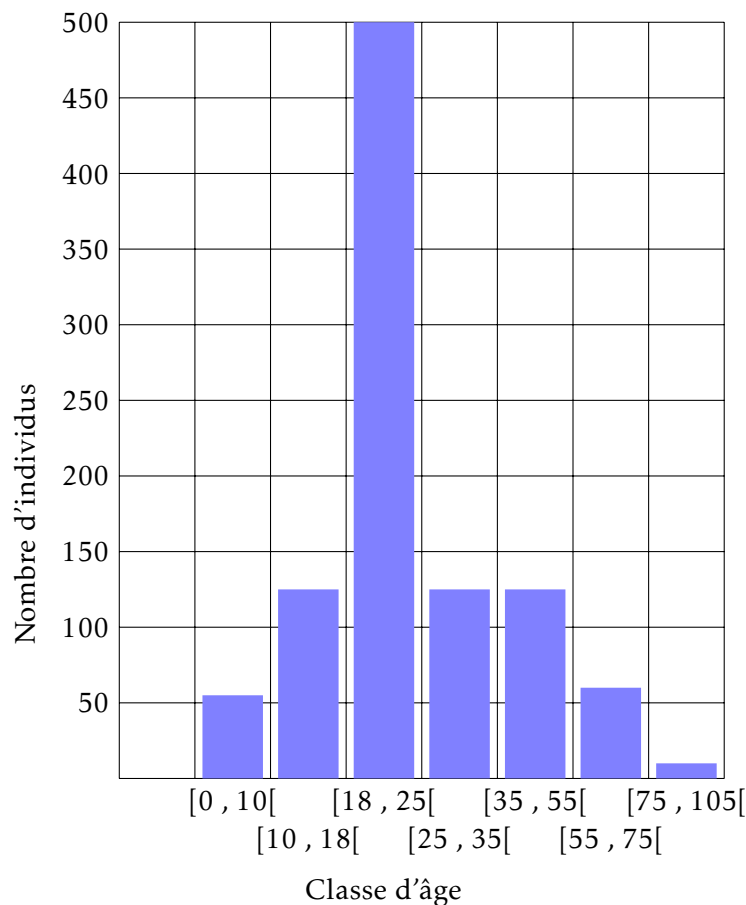
puis

y_i	$[0, 10[$	$[10, 18[$	$[18, 25[$	$[25, 35[$	$[35, 55[$	$[55, 75[$	$[75, +\infty[$	Total
n_i	75	100	325	500	300	150	50	1 500
f_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	1
fréq. cumul.	$\frac{15}{300}$	$\frac{35}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{260}{300}$	$\frac{290}{300}$	1	

2 Représentations graphiques

On peut représenter les résultats à l'aide de diagrammes en bâton ou d'histogrammes :





III Caractéristiques d'une variable aléatoire

1 Moyenne, médiane et mode

Définition 9.6: Moyenne

- Soit X un caractère statistique discret. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. On appelle moyenne de X le réel noté $\bar{X}$ défini par

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i = \sum_{i=1}^p f_i x_i$$

- Soit un caractère statistique continu. On note les classes $[x_i, x_{i+1}[$ pour $1 \leq i \leq p$. On appelle moyenne de X le réel noté $\bar{X}$ défini par

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) = \sum_{i=1}^p f_i \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)$$

Remarque: On note parfois c_i le centre de la classe $[x_i, x_{i+1}[$. On calcule ainsi la moyenne des centres (au sens d'une série discrète).

Exemples: On a

$$\bar{X} = \frac{0 \times 11 + 1 \times 25 + 2 \times 100 + 3 \times 25 + 4 \times 25 + 5 \times 12 + 6 \times 2}{200} = \frac{25 + 200 + 75 + 100 + 60 + 12}{200}$$

$$\bar{X} = \frac{472}{200} = 2,36$$

Le concessionnaire vend en moyenne 2,36 voitures par jour.

Et

$$\bar{Y} = \frac{75 \times 5 + 14 \times 100 + 21,5 \times 325 + 30 \times 500 + 45 \times 300 + 65 \times 150 + 90 \times 50}{1\,500}$$

$$\bar{Y} = \frac{375 + 1\,400 + 6\,987,5 + 15\,000 + 13\,500 + 9\,750 + 4\,500}{1\,500} = \frac{51\,512,5}{1\,500} \simeq 34,34$$

L'âge moyen dans ce village est de 34 ans et 4 mois environ.

Définition 9.7: Médiane

- Soit X un caractère statistique discret. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. On appelle **médiane** d'une série statistique, le réel noté m (ou m_X) la $\frac{n+1}{2}$ ^{ème} valeur dans l'ordre croissant, si n est impair, et la moyenne entre la $\frac{n}{2}$ ^{ème} et la $\frac{n+1}{2}$ ^{ème} valeur dans l'ordre croissant si n est pair.
- Soit X un caractère statistique continu. On note les classes $[x_i, x_{i+1}[$ pour $1 \leq i \leq p$. On appelle **médiane** d'une série statistique, le réel noté m (ou m_X) la valeur qui correspond à 50% des fréquences cumulées.

 Exemples: $m_X = 2$ (moyenne entre la 100^{ème} et la 101^{ème}).

Le nombre médian de voiture vendues est égal à deux. Et $m_Y = 30$. L'âge médian est égal à 30 ans dans ce village.

Définition 9.8: Mode

Soit X un caractère statistique. On appelle **mode** (ou classe modale) de X la valeur (ou la classe) correspondant à l'effectif le plus élevé.

 Remarque: Attention ! Il peut y en avoir plusieurs.

 Exemples:

Le mode de la variable X est deux.

La classe modale de Y est la classe $[25, 35[$.

 Remarque: Dans le cadre d'une élection, le mode correspond à la majorité *relative*. (Et on distingue la majorité relative et la majorité absolue).

2 Variance, écart-type

Définition 9.9: Variance, écart-type

Soit X un caractère statistique. On appelle **variance** de X le réel noté $V(X)$ défini par

$$V(X) = \overline{(X - \bar{X})^2}$$

On appelle écart-type le réel noté $\sigma(X)$ défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété 9.1: Formule de Koenig Huygens

Soit X un caractère statistique. On a

$$V(X) = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

D'où dans le cas discret, on a

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^p f_i (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^p f_i x_i \right)^2$$

 Exemple:

On trouve

$$\overline{X^2} = \frac{0 \times 11 + 1^2 \times 25 + 2^2 \times 100 + 3^2 \times 25 + 4^2 \times 25 + 5^2 \times 12 + 6^2 \times 2}{200} =$$

D'où

$$\overline{X^2} = \frac{25 + 400 + 225 + 400 + 64}{200} = \frac{25 + 400 + 225 + 400 + 300 + 64}{200} = \frac{1414}{200} = 7,07$$

D'où

$$V(X) = 7,07 - (2,36)^2 = 7,07 - 5,5696 = 1,5004$$

d'où

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,5004} \simeq 1,22$$

3 Quantiles, quartiles et déciles

Définition 9.10: Quantiles

Soit X un caractère statistique.

On appelle **premier quartile** d'une série statistique, le réel noté q_1 la valeur qui correspond à 25% des fréquences cumulées. On appelle **troisième quartile** d'une série statistique, le réel noté q_3 la valeur qui correspond à 75% des fréquences cumulées.

Le **deuxième quartile** correspond à la médiane.

On appelle $k^{\text{ème}}$ **décile**, la valeur qui correspond à $k \times 10\%$ des fréquences cumulées.

 Exemple:

Pour la variable aléatoire X, on a $q_1 = 2$, $q_2 = m = 2$ et $q_3 = 3$.

Les déciles correspondent aux valeurs suivantes :

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6$$

Chapitre 10

Continuité et Convexité

La continuité est une propriété essentielle des fonctions qui a de nombreuses applications. Elle est parfois méconnue par les élèves et même pendant un certain temps par les mathématiciens. Ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle qu'une définition précise de la continuité a pu être trouvée. La difficulté de ce chapitre tient peut-être du caractère « visuel » de cette notion.

I Définitions et Propriétés

1 Continuité en un point et sur un ensemble

Définition 10.1: Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

 Exemple: Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 + 3x + \ln(x)$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 + 6 + \ln(2) = 10 + \ln(2) = f(2)$$

C'est pourquoi f est continue en 2.

 Remarque: Dans l'exemple précédent, il serait faux d'affirmer que nous venons de *démontrer* que la fonction est continue. En réalité nous avons *supposé* que tel était le cas. Nous n'avons fait que vérifier. Comment peut-on démontrer qu'une fonction est continue? Nous verrons comment procéder dans le paragraphe suivant.

Définition 10.2: Continuité sur un ensemble

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On dit que f est continue *sur* E si f est continue en x_0 , pour tout x_0 dans E

 Remarque: On parle de la continuité d'une fonction uniquement pour un ensemble inclus dans le domaine de définition de la fonction. Si x_0 est une valeur interdite pour f , alors cela n'a pas de sens de se demander si f est continue en x_0 .

Illustration graphique :

Si on peut tracer la représentation graphique d'une fonction *sur un intervalle*, « sans lever le crayon »

(ou encore si la courbe est en un seul « morceau »), la fonction est continue. Au contraire si on observe un « saut », ou encore si on doit « lever le crayon », alors la fonction n'est pas continue en un point (au moins).

2 Fonctions usuelles et opérations

Propriété 10.1: Fonctions usuelles

Les polynômes, les fractions rationnelles rationnelles, la fonction racine carrée, le logarithme népérien et la fonction exponentielle sont continues sur leur domaine de définition.

Propriété 10.2

Soit k un réel. Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble E et soit $x_0 \in E$. Si f et g sont continues en x_0 , alors

- $f + g$ est continue en x_0 .
- $k \cdot f$ est continue en x_0 .
- $f \times g$ est continue en x_0 .
- $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

Propriété 10.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J . Si $f(I) \subset J$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Propriété 10.4: Lien entre la dérivabilité et la continuité

Soit f une fonction dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0

 **Remarque:** A ce stade du cours, on peut se demander s'il existe des fonctions qui ne sont **pas** continues. En effet, toutes les fonctions usuelles au programme sont continues.

La façon la plus simple de trouver des fonctions qui ne sont pas continues, c'est de définir des fonctions par morceaux. Dans ce cas, il faut que les deux morceaux se « recollent » bien.

 **Exemple:** Soit f définie par morceaux

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

A l'aide des opérations usuelles, on sait que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2 = f(1); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 1 = 2$$

Les deux limites coïncident et coïncident avec la valeur de la fonction en $x_0 = 1$.

D'où f est continue en 1.

En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

II Convexité

Définition 10.3: Convexité

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . Soit (C_f) sa courbe représentative.
On dira que f est **convexe** sur l'ensemble E si (C_f) est au-dessous de ses cordes.
On dira que f est **concave** sur l'ensemble E si (C_f) est au-dessus de ses cordes.

Illustrations :

Propriété 10.5: Convexité et tangentes

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . Soit (C_f) sa courbe représentative.
Si f est **convexe** sur l'ensemble E , alors (C_f) est au-dessus de ses tangentes.
Si f est **concave** sur l'ensemble E , alors (C_f) est au-dessous de ses tangentes.

Illustrations :

Propriété 10.6: Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I
 f est **convexe** sur I si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.
 f est **concave** sur I si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$.

 Exemples:

- Soit $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 3$$

Puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2 > 0$$

f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

- Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 6x - 6$$

f est donc concave sur l'intervalle $] -\infty, 1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$.

Définition 10.4: Convexité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit x_0 un élément de I .

On dira que f a un point d'inflexion en x_0 (ou que la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0) si f change de convexité en x_0 (passant de convexe à concave ou concave à convexe).

 Exemples:

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

f admet un point d'inflexion en $x = 1$.

Chapitre 11

Coefficients binomiaux

I Combinaisons

Définition 11.1: Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n , et p un entier naturel compris entre 1 et n .
On appelle combinaison d'ordre p d'éléments de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

 Exemple: Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

- $\{1; 7; 9; 0\}$ est une combinaison d'ordre 4 d'éléments de E .
- $\{1\}$ est une combinaison d'ordre 1 d'éléments de E .
- $\{-1; 2\}$ n'est pas une combinaison d'éléments de E . (car -1 n'est pas un élément de E)

Propriété 11.1: Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n , et p un entier naturel compris entre 1 et n .

Le nombre de combinaisons d'ordre p d'éléments de E est noté $\binom{n}{p}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \in \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\} ; \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

 Remarques:

- Dans certains sujets, on peut trouver une ancienne notation du nombre de combinaisons, à savoir

$$\binom{n}{p} = C_n^p$$

En présence d'une telle notation (et en présence d'arrangements), il faut bien faire attention aux positions respectives de n et p .

- Le nombre de combinaisons est - comme son nom l'indique - un nombre **entier**. Lorsqu'on calcule le nombre de combinaisons à l'aide de la relation

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

alors on peut toujours simplifier la fraction, de telle sorte qu'il ne reste qu'un produit d'entiers naturels.

- De même que pour les arrangements, on pourra écrire

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \in \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\} ; \binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriété 11.2

On a les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \in \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\} ; \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ et } \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Application : *Triangle de Pascal*.

La proposition précédente nous permet de calculer les nombres de combinaisons pour les premières valeurs de n . En effet, on obtient ce qu'on appelle le *triangle de Pascal*. Voici le triangle de Pascal pour $n = 7$:

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	$\underbrace{3 + 3}$		1				
4	1	4	$\boxed{6}$	4	1			
5	1	5	10	$\underbrace{10 + 5}$		1		
6	1	6	15	20	$\boxed{15}$	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Explications : Pour tracer le triangle de Pascal, on commence par écrire des 1 dans la première colonne car

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \binom{n}{0} = 1$$

Ensuite, chaque coefficient est égal à la somme de deux coefficients situés sur la ligne d'au-dessus : celui immédiatement au-dessus, et celui au-dessus et à gauche (donc en diagonale).

Par exemple

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$$

et

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15$$

II Formule du binôme de Newton

Une des applications du triangle de Pascal est la formule du binôme de Newton :

Propriété 11.3: Binôme de Newton

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul. On a

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + b^n$$

et

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + (-1)^n b^n$$

 Exemples:

- On a pour tout a et b réels,

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 ; (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

- On a pour tout x réel,

$$(2x - 1)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3 \cdot 1 + 6(2x)^2 \cdot 1^2 - 4(2x) \cdot 1^3 + 1^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

Dans ce genre d'exemples, il ne faut pas oublier les parenthèses (autour de l'expression $2x$), en n'élevant que le x à une certaine puissance.

- On a aussi

$$11^4 = (10 + 1)^4 = 10\,000 + 4\,000 + 600 + 40 + 1 = 14\,641$$

Chapitre 12

Primitives et intégrales

Après avoir étudié les dérivées d'une fonction, nous allons étudier les primitives d'une fonction. Nous allons nous poser la question suivante : si je connais la dérivée d'une fonction, peut-on trouver la fonction en question ?

 Contexte historique: Le calcul intégral est le deuxième aspect du calcul infinitésimal découvert par Leibniz et Newton.

I Primitives

1 Définition et propriétés générales

Définition 12.1: (Primitive)

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . On dit que F est la primitive de f si $F' = f$.

 Exemple: Une primitive de $f(x) = 2x$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = x^2$$

En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F'(x) = 2x = f(x)$$

 Remarques:

- On parle d'une primitive et non pas de la primitive, car il n'y a pas unicité de la primitive. (voir proposition suivante).
- Il est beaucoup plus difficile de chercher une primitive que de chercher une dérivée. En effet, il y a certaines fonctions dont on ne peut pas trouver de formule explicite d'une primitive. Il y a aussi des fonctions qui n'admettent pas de primitives.

Propriété 12.1: Non-unicité des primitives

Soit f une fonction définie sur I , admettant une primitive sur I , et soit F une primitive de f sur I . Alors toutes les primitives de f sont de la forme $x \mapsto F(x) + k$ avec k une constante réelle. On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

 Exemple: Toutes les primitives de $f(x) = 2x$ sont les fonctions F de la forme suivante :

$$\exists k \in \mathbb{R} , \forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = x^2 + k$$

En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F'(x) = 2x = f(x)$$

On admettra le résultat suivant :

Propriété 12.2

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors f admet une primitive sur l'intervalle $[a; b]$.

 **Remarque:** Toutes les fonctions usuelles admettent donc des primitives. Cependant, il n'est pas évident - bien au contraire - de trouver une formule explicite d'une primitive.

Propriété 12.3: Primitive d'une combinaison linéaire

Si u et v sont deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I . Si k et l sont deux constantes, alors $ku + lv$ admet une primitive sur l'intervalle I et sa primitive est la fonction $kU + lV$ où U et V désignent les primitives respectives de u et v .

 **Exemple:** Toutes les primitives de $f(x) = 2x + 3$ sont les fonctions F de la forme suivante :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}; F(x) = x^2 + 3x + k$$

En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}; F'(x) = 2x + 3 = f(x)$$

L'exercice 1 consiste à vérifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée. Pour cela, il faut *déjà connaître* une primitive. Or, nous voulons *trouver* une primitive, et non pas seulement *vérifier*. Nous allons maintenant étudier quelques primitives usuelles.

2 Primitives des polynômes

Grâce à la proposition précédente, il nous suffira de connaître une primitive de x^n (pour n un entier naturel quelconque) pour pouvoir déterminer toutes les primitives d'un polynôme. (Il suffira d'effectuer la combinaison linéaire adéquate).

Propriété 12.4: Primitives de x^n sur $\mathbb{R}$

On obtient les primitives suivantes sur $\mathbb{R}$:

$f(x)$	$F(x)$	Remarques
x	$\frac{x^2}{2}$	$I = \mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$I = \mathbb{R}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$I = \mathbb{R}$

 Remarque: Les deux propositions précédentes nous permettent de trouver une primitive de tous les polynômes.

 Exemple: Trouver toutes les primitives de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = (x-2)(3x^2 + x + 4)$$

Avant toute chose, on développe f :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 3x^3 + x^2 + 4x - 6x^2 - 2x - 8 = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$$

D'où en prenant la primitive terme-à-terme, une primitive F de f est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - 8x + k$$

où k désigne une constante réelle.

3 Primitives de $\frac{1}{x^n}$

Propriété 12.5: Primitives de $\frac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

On obtient les primitives suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$f(x)$	$F(x)$	Remarques
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2}$	sur $I =]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^4}$	$-\frac{1}{3x^3}$	ou sur
$\vdots$	$\vdots$	$I =]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	

 Exemple: Trouver toutes les primitives de la fonction f définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{x^5}$$

Avant toute chose, on sépare tous les termes :

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{7}{x^5}$$

D'où en prenant la primitive terme-à-terme, une primitive F de f est de la forme

$$\forall x \in]0; +\infty[; F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} - \frac{7}{4x^4} + k$$

où k désigne une constante réelle.

4 Primitives et racine carrée

Propriété 12.6: Primitives et racine carrée

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Alors f admet comme primitive la fonction F définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[; F(x) = \sqrt{x}$$

De plus, F admet comme primitive la fonction G définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[; G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

5 Primitives définie en un point**Propriété 12.7: Primitives définie en un point**

Soit f une fonction admettant une primitive sur l'intervalle $[a; b]$. Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $[a; b]$ et y_0 un réel quelconque.

Il existe une unique primitive F de f qui vérifie $F(x_0) = y_0$.

 Exemple: Soit $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2}$. Trouver l'unique primitive F de f sur $]0; +\infty[$ vérifiant $F(1) = 0$. On sait qu'il existe une constante k telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x} + k$$

$$\text{D'où } F(1) = \frac{1}{3} - 3 + k = k - \frac{5}{3}.$$

En conclusion on a $k = \frac{5}{3}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{3}$$

6 Primitives des fonctions composées

Propriété 12.8: Primitives de $u' \times u^n$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . On obtient les primitives suivantes sur I :

$f(x)$	$F(x)$	Remarques
$u'(x) \cdot u(x)$	$\frac{u(x)^2}{2}$	
$u'(x) \cdot u(x)^2$	$\frac{u(x)^3}{3}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$u'(x) \cdot u(x)^n$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	

 Exemples:

- Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 7(7x - 3)^3$$

On pose

$$u(x) = 7x - 3 \Rightarrow u'(x) = 7$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = u'(x) \cdot u(x)^3$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(7x - 3)^4}{4}$$

- Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 7)^{11}$$

On pose

$$u(x) = x^2 - 3x + 7 \Rightarrow u'(x) = 2x - 3$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = u'(x) \cdot u(x)^{11}$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{u(x)^{12}}{12} = \frac{(x^2 - 3x + 7)^{12}}{12}$$

 Remarque: Dans certains cas, on n'obtient pas *exactement* l'un des cas précédents. Mais, on les obtient, à une constante multiplicative près. La proposition 2 permet de conclure.

 Exemples:

- Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = (5x - 4)^7$$

On pose

$$u(x) = 5x - 4 \Rightarrow u'(x) = 5$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{5} \cdot u'(x) \cdot u(x)^7$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{u(x)^8}{8} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x-4)^8}{8}$$

• Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 3x - 11)^{22}$$

On pose

$$u(x) = x^3 - 3x - 11 \Rightarrow u'(x) = 3x - 3$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{3} \cdot u'(x) \cdot u(x)^{22}$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{u(x)^{23}}{23} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 - 3x - 11)^{23}}{23}$$

Propriété 12.9: Primitives de $\frac{u'}{u^n}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . On obtient les primitives suivantes sur I :

$f(x)$	$F(x)$	Remarques
$\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$-\frac{1}{u(x)}$	si $u(x) \neq 0$
$\frac{u'(x)}{u(x)^3}$	$-\frac{1}{2u(x)^2}$	si $u(x) \neq 0$
$\vdots$	$\vdots$	
$\frac{u'(x)}{u(x)^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u(x)^{n-1}}$	si $u(x) \neq 0$

 Exemples:

• Soit f définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f(x) = \frac{3x+4}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 4x - 7\right)^4}$$

On pose

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x - 7 \Rightarrow u'(x) = 3x + 4$$

D'où

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^4}$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; F(x) = -\frac{1}{3u(x)^3} = -\frac{1}{3\left(\frac{3}{2}x^2 + 4x - 7\right)^3}$$

• Soit f définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f(x) = \frac{5x}{(-x^2 + 9)^{22}}$$

On pose

$$u(x) = -x^2 + 9 \Rightarrow u'(x) = -2x$$

D'où

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f(x) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)^{22}}$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; F(x) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{-1}{21 \cdot u(x)^{21}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{21 \cdot (-x^2 + 9)^{21}}$$

Propriété 12.10: Primitives de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Une primitive de la fonction f définie par

$$\forall x \in I ; f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

est la fonction F définie par

$$\forall x \in I ; F(x) = \sqrt{u(x)}$$

 Exemple:

• Soit f définie par

$$\forall x \in \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[; f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$$

On pose

$$u(x) = 3x + 4 \Rightarrow u'(x) = 3$$

D'où

$$\forall x \in \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[; f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$\forall x \in \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[; F(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{u(x)} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3x+4}$$

II Intégrales

1 Définition

Définition 12.2: Intégrale

Si a et b sont deux réels, avec $a < b$.

Soit f une fonction admettant une primitive F sur l'intervalle $[a; b]$.

On appelle intégrale de f entre a et b le nombre $F(b) - F(a)$.

On le note $\int_a^b f(x)dx$

☞ Remarques: • b est appelée borne supérieure et a borne inférieure de l'intégrale.

• On admettra que toute fonction admettant une dérivée sur un intervalle I admet aussi une primitive sur l'intervalle I .

🔧 Exemple: Calculer

$$I = \int_0^1 (2x-3)(x^2-3x+5)^2 dx$$

On pose $f(x) = (2x-3)(x^2-3x+5)^2$. Cherchons F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ (ou l'intervalle $[0; 1]$). Posons

$$u(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow u'(x) = 2x - 3$$

D'où f est de la forme $f = u' \cdot u^2$ donc une primitive F est de la forme $F = \frac{u^3}{3}$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{(x^2 - 3x + 5)^3}{3}$ D'où

$$I = F(1) - F(0) = \frac{(1-3+5)^3}{3} - \frac{(0-0+5)^3}{3}$$

$$I = \frac{3^3}{3} - \frac{5^3}{3} = \frac{27-125}{3} = -\frac{98}{3}$$

☞ Remarque: Notation "crochet".

Lorsqu'on calcule une intégrale, on peut aussi noter la primitive à l'aide d'un crochet.

Par exemple, pour l'intégrale I précédente, on peut aussi noter

$$I = \left[\frac{(x^2 - 3x + 5)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3^3}{3} - \frac{5^3}{3} = \frac{27-125}{3} = -\frac{98}{3}$$

2 Applications

L'application principale des intégrales est l'étude des aires.

Propriété 12.11: Lien entre Aire et Intégrale

Soit f une fonction **positive** admettant une primitive sur l'intervalle $[a; b]$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative tracée dans un repère orthonormé. Dans ce cas, l'aire $\mathcal{A}$ de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'intégrale de f entre a et b .

Autrement dit

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$$

🔧 Exemple: Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites verticales

d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

D'après la proposition précédente, on a

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

👉 Remarques:

- Une aire doit toujours être un nombre positif. C'est pourquoi, on impose à la fonction d'être positive.
- S'il n'y a pas d'unités dans l'énoncé (par exemple des centimètres carrés), on écrira le résultat en unités d'aire (u.a. en abrégé).
- Dans le cas où la fonction est négative, alors l'aire est égale à l'opposé de l'intégrale.

Chapitre 13

Variables aléatoires discrètes finies

Ce chapitre sera consacré à l'étude des variables aléatoires. La notion de variable aléatoire est centrale en théorie des probabilités. Tout d'abord, l'introduction d'une variable aléatoire va permettre de simplifier les notations. En effet, à l'aide d'une seule variable aléatoire (et donc d'une seule lettre), on pourra définir plusieurs événements, alors qu'avant il nous fallait plusieurs lettres. Mais surtout, on pourra désormais décrire avec une précision accrue certains aspects d'une expérience aléatoire. Pour cela, nous définirons l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

Dans tout ce chapitre Ω désigne un ensemble fini et l'on a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

I Définitions et propriétés

1 Définition

Définition 13.1

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est noté Ω . On appelle variable aléatoire discrète finie toute fonction X de Ω dans $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ telle que pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un élément de $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ lié à l'expérience aléatoire.

On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, l'ensemble des valeurs prise par la variable aléatoire.

 **Exemple:** On lance deux dés et on appelle X la somme des résultats obtenus (qui est aléatoire). Dans ce cas $X(\Omega) = \{2; 3; \dots; 11; 12\} = [2; 12]$.

Définition 13.2

Soit X une variable aléatoire. On appelle loi de X la donnée des probabilités

$$P(X = x_i) \text{ pour } i \in \{1; 2; \dots; p\}$$

 **Remarque:** Il est parfois pratique de présenter la loi à l'aide d'un tableau lorsque l'univers est un ensemble fini.

 **Exemple:** Une urne contient trois boules numérotées 2, une boule numérotée 5 et trois boules numérotées 7.

On tire une boule dans l'urne. Soit X le numéro de la boule tirée. La loi de X est :

x_i	2	5	7
p_i	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

2 Fonction de répartition

Définition 13.3

Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction de répartition de X la fonction notée F_X (ou F s'il n'y a pas d'ambiguïtés) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F_X(x) = P(X \leq x)$$

Propriété 13.1

Soit X une variable aléatoire discrète finie. Sa fonction de répartition F vérifie les propriétés suivantes :

- (i) F est une fonction en escalier.
- (ii) F est une fonction croissante.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

 Exemple: Une urne contient trois boules numérotées 2, une boule numérotée 5 et trois boules numérotées 7.

On tire une boule dans l'urne. Soit X le numéro de la boule tirée. La fonction de répartition de X est la fonction suivante :

II Moments d'une variable aléatoire

1 Espérance

Définition 13.4

Soit X une variable aléatoire. On appelle espérance (ou moyenne) de X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

 Exemple: Une urne contient trois boules numérotées 2, une boule numérotée 5 et trois boules numérotées 7.

On tire une boule dans l'urne. Soit X le numéro de la boule tirée. On a

$$\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{3}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 7 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6 + 5 + 21}{7} = \frac{32}{7} \simeq 4,57$$

Propriété 13.2

Soit X et Y deux variables aléatoires et k un réel. On a

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{E}(k \cdot X) = k \cdot \mathbb{E}(X)$$

2 Variance et écart-type

Définition 13.5

Soit X une variable aléatoire. On appelle variance de X le nombre noté $\mathbb{V}(X)$ défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

 Exemple: Une urne contient trois boules numérotées 2, une boule numérotée 5 et trois boules numérotées 7.

On tire une boule dans l'urne. Soit X le numéro de la boule tirée. On a

$$\mathbb{E}(X^2) = 4 \cdot \frac{3}{7} + 25 \cdot \frac{1}{7} + 49 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12 + 25 + 147}{7} = \frac{184}{7}$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) = \frac{184}{7} - \frac{32^2}{7^2} = \frac{1288 - 1024}{49} = \frac{264}{49}$$

Propriété 13.3

Soit X une variable aléatoire et k une constante. On a les propriétés suivantes :

- (i) $\mathbb{V}(X) \geq 0$.
- (ii) $\mathbb{V}(k \cdot X) = k^2 \cdot \mathbb{V}(X)$.

Définition 13.6

Soit X une variable aléatoire. On définit l'écart-type de X le nombre noté $\sigma(X)$ défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Chapitre 14

Valeur absolue

Il est courant en mathématique de travailler avec des grandeurs positives. Or, la valeur absolue d'un nombre a pour rôle de rendre un nombre positif. Dans ce chapitre, nous étudierons quelques propriétés de la valeur absolue, en s'appuyant sur les acquis des classes antérieures.

I Valeur absolue d'un nombre

1 Définition

Définition 14.1

Soit x un réel. On appelle *valeur absolue* du nombre x , le nombre noté $|x|$ défini par

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

 Remarque: En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$. Une valeur absolue est toujours positive.

 Exemples:

- $|-2| = |2| = 2, \left| -\frac{3}{4} \right| = \left| \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}.$

2 Propriétés

Propriété 14.1

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x \times y| = |x| \times |y|$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$$

Démonstration:

Si x et y sont de même signe, alors $xy > 0$, et donc $|xy| = xy$. Or selon leur signe $|x| \times |y| = xy$ ou $|x| \times |y| = (-x) \cdot (-y) = xy$.

D'où l'égalité.

Si x et y sont de signe contraire, alors $xy < 0$, et donc $|xy| = -xy$. Or selon leur signe $|x| \times |y| = (-x) \cdot y = -xy$ ou $|x| \times |y| = x \cdot (-y) = -xy$.

D'où l'égalité.

La deuxième égalité s'obtient en posant $y = -1$.

Dans ce cas, $|xy| = |-x|$ et $|x| \times |y| = |x| \times |-1| = |x|$.

Or $|x \times y| = |x| \times |y|$, c'est pourquoi, $|-x| = |x|$

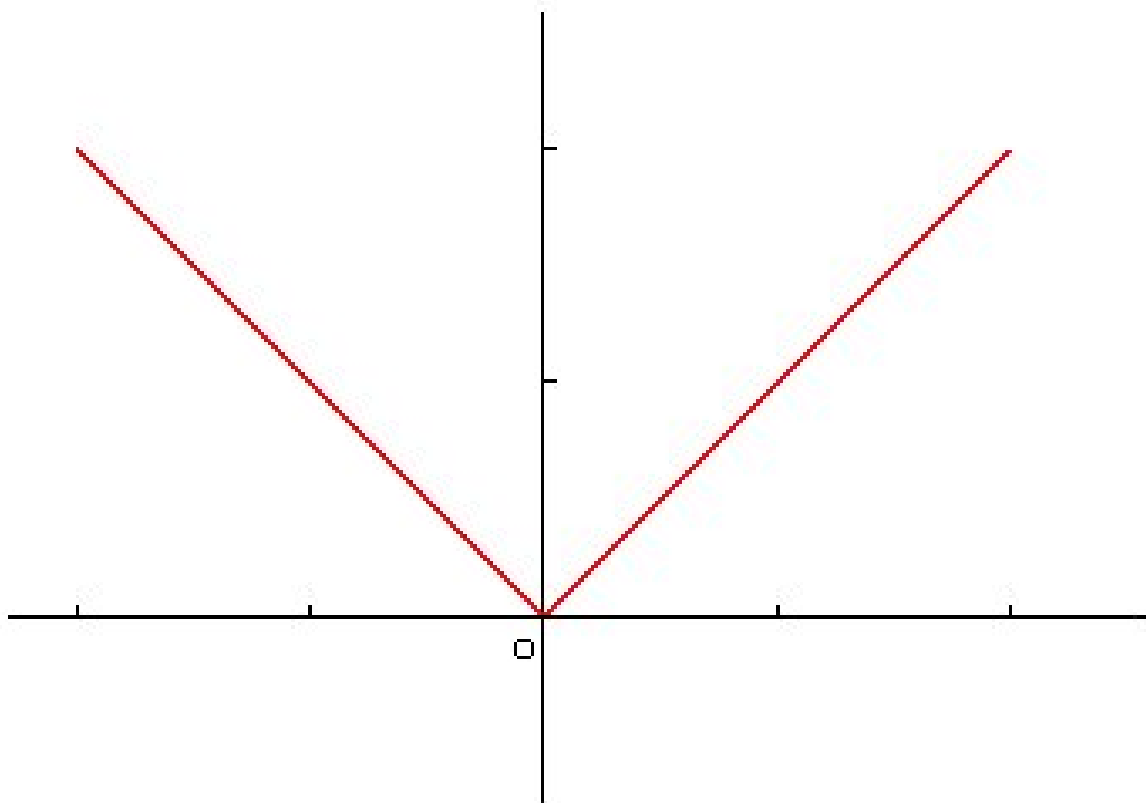


II Fonction valeur absolue

1 Représentation graphique

Conséquence : la fonction

$f : x \mapsto |x|$ est paire



Graphique de la fonction valeur absolue

2 Équations et inéquations

Pour résoudre les équations et les inéquations avec des valeurs absolues, on applique les résultats suivants :

Propriété 14.2: Équations de la forme $|A| = b$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $|A| = b$ est :

- $\mathcal{S} = \{-b ; b\}$ lorsque b est strictement positif ($b > 0$).
- $\mathcal{S} = \{0\}$ lorsque b est nul ($b=0$).
- $\mathcal{S} = \emptyset$ lorsque b est strictement négatif ($b < 0$).

Propriété 14.3: Inéquations de la forme $|A| \leq b$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation $|A| \leq b$ est :

- $\mathcal{S} = [-b ; b]$ lorsque b est strictement positif ($b > 0$).
- $\mathcal{S} = \{0\}$ lorsque b est nul ($b=0$).
- $\mathcal{S} = \emptyset$ lorsque b est strictement négatif ($b < 0$).

Propriété 14.4: Inéquations de la forme $|A| \geq b$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation $|A| \geq b$ est :

- $\mathcal{S} =]-\infty ; -b] \cup [b ; +\infty[$ lorsque b est strictement positif ($b > 0$).
- $\mathcal{S} = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$ lorsque b est nul ($b=0$).
- $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ lorsque b est strictement négatif ($b < 0$).

Chapitre 15

Lois usuelles

Dans ce chapitre, nous allons étudier des lois remarquables en probabilités. Pour ces lois dites *usuelles*, on calculera l'espérance et la variance ainsi que leurs principales propriétés. Dans les exercices, vous pourrez citer sans démonstration les résultats du cours (en particulier l'espérance et la variance d'une loi binomiale, qui joueront un grand rôle dans les exercices de concours).

I Loi uniforme

Définition 15.1

On dit que la v.a. X suit une loi uniforme de paramètre n si X prend les valeurs $1, 2, \dots, n$ avec les probabilités

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = n) = \frac{1}{n}$$

Notation : On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ pour signaler que X suit une loi uniforme de paramètre n

 Remarque: Si X suit une loi uniforme de paramètre n , alors les événements $\{X = 1\}, \{X = 2\}, \dots, \{X = n\}$ sont équiprobables.

 Exemple: L'exemple typique d'une loi uniforme est un dé.

On lance un dé non truqué (à 6 faces). Soit X une v.a. qui associe le résultat du lancé. Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Réponse : On obtient les probabilités suivantes :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

D'où

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+6}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{35}{12}$$

Propriété 15.1

Si une v.a. X suit une loi uniforme de paramètre n , alors on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration:

On a

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1+2+\dots+n}{n}$$

On reconnaît les n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1, d'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

puisqu'on peut simplifier le numérateur et le dénominateur par n .

De même

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{n} + 2^2 \times \frac{1}{n} + \dots + n^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n}$$

On admet la relation suivante (voir chapitre sur le raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'où, en simplifiant par n , on obtient

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

On en conclut que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12}$$

Ou encore

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

■

 Remarque: Dans les exercices, lorsqu'on reconnaîtra une loi usuelle, on pourra donner le résultat de l'espérance ou de la variance (sans calculer $\mathbb{E}(X^2)$) en appliquant la proposition précédente.

 Exemple: Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(21)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{22}{2} = 11 \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{22 \times 20}{12} = \frac{440}{12} = \frac{110}{3}$$

II Loi de Bernoulli

Définition 15.2

On dit que la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si X prend les valeurs 0 ou 1 avec les probabilités :

$$\begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}$$

X correspond à une épreuve ayant deux issues possibles : un échec et un succès. On parle d'épreuve de Bernoulli.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

 Exemple: Soit X une v.a. qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Réponse : On obtient les probabilités suivantes :

x_i	0	1
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

D'où

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2}{9}$$

Propriété 15.2

Si une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors on a

$$\mathbb{E}(X) = p ; \mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

Démonstration:

Si on présente la loi de X sous la forme d'un tableau, alors on obtient le tableau suivant :

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

D'où

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$$

$$\mathbb{E}(X) = p$$

De même,

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$



☞ **Remarque:** On peut aussi exprimer la proposition précédente de la façon suivante :

- si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli, alors l'espérance de X est égale à la probabilité d'obtenir un succès.
- et sa variance est égale au produit de la probabilité d'obtenir un succès par la probabilité d'obtenir un échec.

III Loi binomiale

Dans ce sous-paragraphe, nous allons définir une loi très importante : la loi binomiale. Cette loi est obtenue à partir de plusieurs lois de Bernoulli indépendantes (voir chapitre sur l'indépendance).

Définition 15.3

On dit que la v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si X correspond au nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p .

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Cas particulier :

Si $n = 1$ alors X suit une loi binomiale, symboliquement

$$\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$$

☞ **Remarque:** Une loi de Bernoulli compte le nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p . Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p . Alors, on peut écrire la variable aléatoire X sous la forme

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

avec $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p .

En effet, $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ compte aussi le nombre de succès, puisque chaque succès individuel augmente la somme d'une unité, alors que l'échec n'augmente pas (ni ne diminue) le total.

☞ **Exemple:** On lance un pièce de monnaie 3 fois. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que l'on obtient « pile ». Tous les résultats possibles sont (on note P pour pile et F pour face) :

(P, P, P)	$X = 3$
(P, P, F)	$X = 2$
(P, F, P)	$X = 2$
(F, P, P)	$X = 2$
(P, F, F)	$X = 1$
(F, P, F)	$X = 1$
(F, F, P)	$X = 1$
(F, F, F)	$X = 0$

Conclusion : La loi de X est donnée par

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

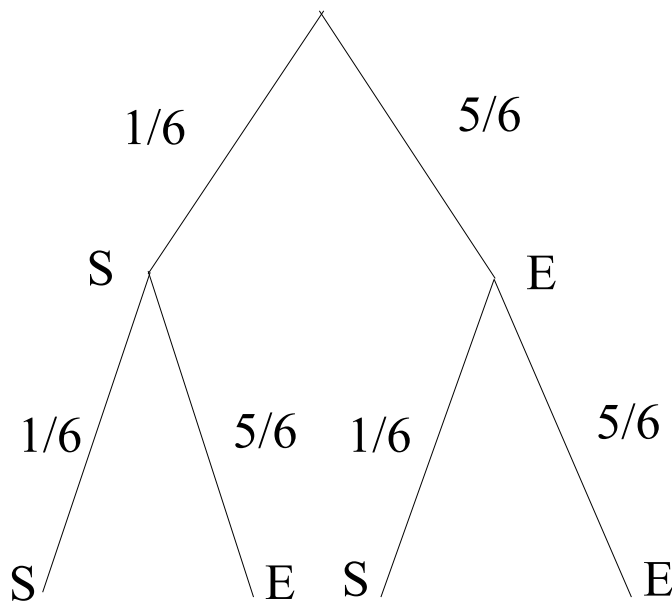
et on trouve

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2} ; \mathbb{V}(X) = \frac{3}{4}$$

☞ Remarque: Les nombres 1 ; 3 ; 3 ; 1 sont les coefficients qui apparaissent dans la formule du binôme de Newton lorsqu'on développe $(a + b)^3$ d'où le nom de loi *binomiale* ...

☞ Remarque: Si on représente X à l'aide d'un arbre, si X suit une loi binomiale les probabilités seront toutes identiques.

✎ Exemple: Si on lance deux dés à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. On obtient l'arbre suivant :



D'où la loi de X est donnée par

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

Propriété 15.3

Si une v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors on a pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Démonstration:

On peut écrire la variable aléatoire X sous la forme

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

avec $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p .

On a

$$P(X = k) = P(\exists E / \text{Card}(E) = k \text{ et } \forall i \in E, X_i = 1 \text{ et } \forall i \in \bar{E}, X_i = 0)$$

Si on se donne l'ensemble E qui correspond aux tentatives réussies, la probabilité S_k d'obtenir k succès et $n - k$ échecs (ce qui fait bien au total $k + n - k = n$ tentatives) est de

$$S_k = p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Pour obtenir la probabilité de l'événement $\{X = k\}$, il faut tenir compte du nombre de choix de l'ensemble E (c'est-à-dire de l'ordre dans lequel les succès apparaissent, ils peuvent en effet apparaître au début, à la fin, ou au milieu, etc...). Ceci revient à choisir k succès parmi n tentatives. On obtient donc $\binom{n}{k}$ choix possibles.

Puisque les probabilités S_k ne dépendent pas du choix de E , il suffit de multiplier S_k par le nombre de choix de E , et on a

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

■

Propriété 15.4

Si une v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors on a

$$\mathbb{E}(X) = np ; \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Démonstration:

On peut écrire la variable aléatoire X sous la forme

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

avec $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p .

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$$

or les variables aléatoires X_i suivent une loi de Bernoulli, d'où

$$\mathbb{E}(X) = p + p + \cdots + p = np$$

De même, par indépendance, on obtient

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$$

$$\mathbb{V}(X) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p)$$

■

Chapitre 16

Logarithmes et exponentielles

Ce chapitre sera consacré à l'étude de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

 Contexte historique: En 1614, le mathématicien écossais John Napier publie un ouvrage sur un nouvel outil de calcul qu'on appelle aujourd'hui *logarithme*. La propriété essentielle de cette nouvelle fonction est qu'elle transforme les produits en somme. Par ailleurs, le terme « logarithme » venant du grec, et signifiant « rapport d'un nombre ».

On a constaté que les logarithmes interviennent dans la perception auditive. En effet, l'intensité auditive se mesure en décibels qui est une unité logarithmique¹.

I Fonction logratihme

1 Définition et propriétés algébriques

Définition 16.1

La fonction logarithme népérien est définie comme étant la primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

On la note $\ln$.

En particulier $\ln(1) = 0$

On a donc la proposition suivante :

Propriété 16.1

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; \infty[$ et

$$\forall x \in]0; \infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

1. En effet, on a

$$L = 10 \times \frac{\ln(P)}{\ln(10)} + 120$$

où L désigne l'intensité auditive en décibels, P la puissance surfacique en $W \cdot m^{-2}$ et $\ln$ la fonction logarithme décimal. De manière analogue, la hauteur d'une note peut être exprimée à l'aide d'une unité logarithmique, le *cent*, définie de la manière suivante :

$$c = 1200 \times \frac{\ln(f) - \ln(f_0)}{\ln(2)}$$

Où c désigne la hauteur en cents, f désigne la fréquence du son en Hz et f_0 la fréquence du son de référence (par exemple un A_3 qui a une fréquence de 440 Hz).

Ainsi lorsqu'on joue les notes d'une gamme tempérée (i.e. sur un piano les 12 notes qui se suivent, blanches et noirs incluses), on perçoit une échelle arithmétique alors que les fréquences forment une suite géométrique (voir cours sur les suites arithmétiques et géométriques).

Théorème 16.1: Propriété fondamentale du logarithme $\forall a > 0$ et $\forall b > 0$

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On déduit du résultat précédent le résultat suivant :

Propriété 16.2 $\forall a > 0, \forall b > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ et } \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a) \text{ et } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(a)$$

2 Étude de la fonction logarithme**Propriété 16.3**

Le domaine de définition de la fonction logarithme est $\mathcal{D}_{\ln} =]0; +\infty[$

C'est pourquoi dans le cas d'une fonction composée $f = \ln(u)$, le domaine de définition est l'ensemble des x tels que $u(x) > 0$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} ; u(x) > 0\}$$

 Exemple: Soit $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

Posons $u(x) = x^2 - 3x + 2$. Cherchons le signe de $x^2 - 3x + 2$.

$\Delta = 9 - 8 = 1 = 1^2$, donc le polynôme u admet deux racines

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On obtient donc le signe suivant pour u :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$u(x)$		+	0	-	0	+	

D'où, $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

D'après ce qui précède, on a le résultat suivant :

Propriété 16.4

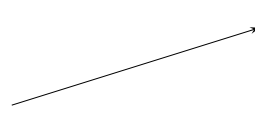
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Or, si x appartient à $]0; +\infty[$, alors $\frac{1}{x} > 0$.

C'est pourquoi la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln(x)$		



On obtient donc le tableau de variation suivant :

On en déduit le signe de la fonction

Propriété 16.5

On obtient les signes suivants pour la fonction logarithme népérien :

- Si $0 < x < 1$, alors $\ln(x) < 0$.
- Si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$.

 Remarque: On peut résumer ces résultats dans un tableau de signe

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+

Propriété 16.6: Limites aux bornes du domaine

On obtient les limites suivantes pour la fonction $\ln$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Démonstration:

On admet le résultat suivant :

Soit f une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]a; +\infty[$.

Si f est majorée, alors f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

Sinon

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On peut appliquer ce résultat à la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Montrons que la fonction $\ln$ n'est pas majorée.

Or $\ln(10) > 1$ (voir chapitre sur les propriétés des intégrales) donc

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \ln(10^n) = n \ln(10) > n$$

Donc la fonction n'est pas majorée.

■

Propriété 16.7: Composition de limites

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Soit u une fonction définie au voisinage de a telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell$$

où ℓ désigne un réel positif ou nul, ou encore $+\infty$. On obtient la limite suivantes pour la fonction $\ln \circ f$ (autrement dit lorsqu'on compose par $\ln$) :

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln[u(x)] = \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell = 0 \\ \ln(\ell) & \text{si } \ell \in]0; +\infty[\\ +\infty & \text{si } \ell = +\infty \end{cases}$$

On peut ainsi résumer la situation à l'aide d'un tableau :

$\lim u(x)$	$\lim \ln[u(x)]$
0	$-\infty$
ℓ	$\ln(\ell)$
$+\infty$	$+\infty$

 Exemple: Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right), \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$$

• en $+\infty$.

Posons $X = \frac{2x-1}{x-3}$. Étudions la limite de X en $+\infty$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x-1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-3 = +\infty$, on obtient une forme indéterminée de la forme

« $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour lever l'indétermination, on factorise par la puissance de x de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2$$

D'où en composant les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \lim_{X \rightarrow 2} \ln(X) = \ln(2)$$

• en 3^+ .

Posons $X = \frac{2x-1}{x-3}$. Étudions la limite de X en 3^+ .

Puisque $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 1 = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0$, on obtient par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 1}{x - 3} = \infty$$

Pour déterminer savoir si la limite de X en 3^+ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, on étudie le signe de X en fonction de x .

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$
$x - 3$		$-$	$-$	0
X		$+$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} X = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 1}{x - 3} = +\infty$$

D'où en composant les limites

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln\left(\frac{2x - 1}{x - 3}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

• en $\frac{1}{2}^-$.

Posons $X = \frac{2x - 1}{x - 3}$. Étudions la limite de X en $\frac{1}{2}^-$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} X = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x - 1}{x - 3} = 0$$

D'où en composant les limites

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x - 1}{x - 3}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$$

Étudions désormais quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme népérien. On étudie ce qu'on appelle des résultats de *croissance comparée*.

Propriété 16.8: Croissance comparée

Soit n un entier supérieur ou égal à n .

On obtient les limites suivantes pour la fonction $\ln$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

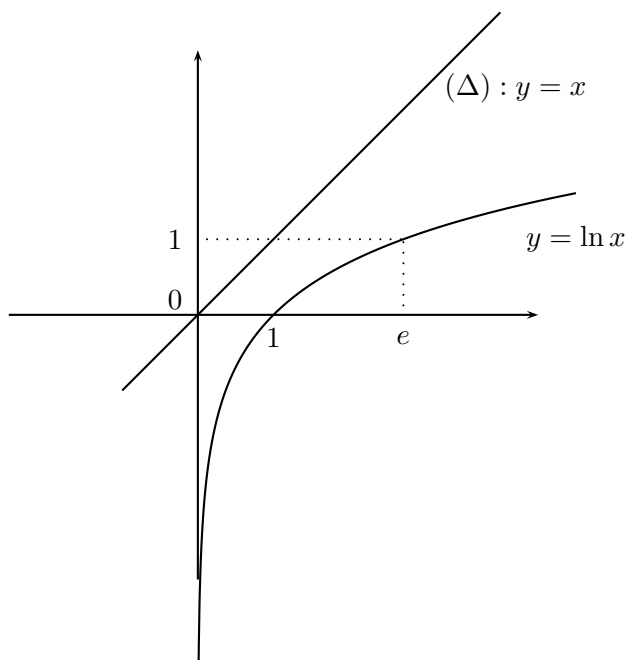
En particulier lorsque $n = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

☞ Remarque: Ces limites sont des formes indéterminées. Pour lever de telles formes indéterminées, on applique les résultats de croissance comparée.

On retient que les puissances « l'emportent » sur la fonction logarithme népérien.

La courbe représentative de la fonction $\ln$ a l'allure suivante :



☞ Remarque: (le nombre e sera défini dans le paragraphe suivant).

3 Équations et inéquations

Définition 16.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit E un ensemble. On dira que f est (ou réalise) une bijection de I sur E , si tout élément de E admet un unique antécédent dans I par f .

Définition 16.3

Soit f une bijection de I sur E . On appelle fonction réciproque de f , la fonction, notée f^{-1} définie par

$$\forall y \in E ; f^{-1}(y) = x \text{ si } f(x) = y$$

☞ Remarque: Avec les notations précédentes, f^{-1} est une bijection de E sur I .

Propriété 16.9

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I . Alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Conséquence :

Puisque $\ln$ est strictement croissante sur $I =]0; +\infty[$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f est une bijection de $I =]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier le nombre 1 admet un unique antécédent noté e .

Propriété 16.10

Le nombre e est défini par la relation

$$\ln(e) = 1$$

On en déduit le résultat suivant :

Propriété 16.11

On a l'équivalence suivante :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

avec a et b appartenant à $]0; +\infty[$

 **Remarque:** La proposition précédente nous permet de résoudre des équations avec des logarithmes. Il suffit de retirer de part et d'autre les $\ln$. Mais attention, avant d'effectuer la moindre simplification, il faut chercher le domaine de l'équation.

 **Exemple:** Quelles sont les solutions de l'équation $\ln(x+1) = \ln(9-3x)$.

En premier lieu, il faut trouver le domaine de l'équation.

Or son domaine $\mathcal{D}$ vaut $\mathcal{D} =]-1; 3[$.

On a donc

$$\forall x \in]-1; 3[; \ln(x+1) = \ln(9-3x) \Leftrightarrow x+1 = 9-3x$$

$$\forall x \in]-1; 3[; \ln(x+1) = \ln(9-3x) \Leftrightarrow 4x = 8$$

$$\forall x \in]-1; 3[; \ln(x+1) = \ln(9-3x) \Leftrightarrow x = 2$$

D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \{2\}$$

Propriété 16.12

Puisque $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a l'équivalence suivante :

$$\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$$

avec a et b appartenant à $]0; +\infty[$

 **Remarque:** La proposition précédente nous permet de résoudre des inéquations avec des logarithmes. Il suffit de retirer de part et d'autre les $\ln$. Mais attention, avant d'effectuer la moindre simplification, il faut chercher le domaine de l'équation.

 **Exemple:** Quelles sont les solutions de l'inéquation $\ln(x-1) \leq \ln(8-2x)$.

En premier lieu, il faut trouver le domaine de l'équation.

Or son domaine $\mathcal{D}$ vaut $\mathcal{D} =]1; 4[$.

On a donc

$$\forall x \in]1; 4[; \ln(x-1) \leq \ln(8-2x) \Leftrightarrow x-1 \leq 8-2x$$

$$\forall x \in]1; 4[; \ln(x-1) \leq \ln(8-2x) \Leftrightarrow 3x \leq 9$$

$$\forall x \in]1; 4[; \ln(x-1) \leq \ln(8-2x) \Leftrightarrow x \leq 3$$

D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation est

$$\mathcal{S} =]1; 3]$$

4 Études de fonctions

Propriété 16.13

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction composée $f = \ln \circ u$, définie par

$$\forall x \in I ; f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I ; f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

 Exemple: Soit $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ et $I =]2; +\infty[$.

Posons $u(x) = x^2 - 3x + 2$, on a $u'(x) = 2x - 3$. D'où

$$\forall x \in I ; f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

 Exemple: Étudions la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 + 2x - 1)$$

– Première étape: Domaine de définition

On doit chercher le signe de la fonction $u(x) = 2x^2 + 2x - 1$

- Signe du polynôme $2x^2 + 2x - 1$

On calcule le discriminant Δ du polynôme. On a $\Delta = 4 + 8 = 12 > 0$.

Le polynôme $2x^2 + 2x - 1$ admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$2x^2 + 2x - 1$		+	-	+

Le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \left] -\infty; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; +\infty \right[$$

– Deuxième étape: Sens de variation

En appliquant la formule de la dérivée $\ln(u)$, on obtient

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f'(x) = \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x - 1}$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$
$4x+2$	-	-	0	+	+
$2x^2+2x-1$	+	0	-	-	0
$\frac{4x+2}{2x^2+2x-1}$	-				+
$f'(x)$	-				+
$f(x)$	$\searrow$				$\nearrow$

– Troisième étape: Limites

Limite en $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

On a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1-\sqrt{3}}{2}} 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

donc en composant par $\ln$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1-\sqrt{3}}{2}} f(x) = -\infty$$

Limite en $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

De même, on a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1+\sqrt{3}}{2}} 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

donc en composant par $\ln$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1+\sqrt{3}}{2}} f(x) = -\infty$$

Limite en $+\infty$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 2x - 1 = +\infty$$

donc en composant par $\ln$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Limite en $-\infty$

De même, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 2x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

– Quatrième étape: Tangentes et Asymptotes

La fonction f admet deux asymptotes verticales d'équation $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

 Exemple: Étudions la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}\right)$$

– Première étape: Domaine de définition

On doit chercher le signe de la fonction $\frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$

• Signe du polynôme $-x^2 + x + 2$

On calcule le discriminant Δ du polynôme. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$.
Le polynôme $-x^2 + x + 2$ admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$$

• Signe du polynôme $x^2 + x + 1$

On calcule le discriminant Δ du polynôme. On a $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.
Le polynôme $x^2 + x + 1$ n'admet donc pas de racine. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 > 0$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$
$\frac{-x^2+x+2}{x^2+x+1}$	$-$	0	$+$	0	$-$

Le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D}_f =]-1; 2[$$

– Deuxième étape: Sens de variation

En appliquant les propriétés algébriques du logarithme, on obtient

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f(x) = \ln(-x^2 + x + 2) - \ln(x^2 + x + 1)$$

D'où

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(-2x+1)(x^2+x+1) - (2x+1)(-x^2+x+2)}{(-x^2+x+2)(x^2+x+1)}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f'(x) = \frac{-2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1 - (-2x^3 + 2x^2 + 4x - x^2 + x + 2)}{(-x^2+x+2)(x^2+x+1)}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f'(x) = \frac{-2x^2 - 6x - 1}{(-x^2+x+2)(x^2+x+1)}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f ; f'(x) = -\frac{2x^2 + 6x + 1}{(-x^2+x+2)(x^2+x+1)}$$

• Signe du polynôme $2x^2 + 6x + 1$

On calcule le discriminant Δ du polynôme. On a $\Delta = 36 - 8 = 28 > 0$.

Le polynôme $2x^2 + 6x + 1$ admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{28}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{28}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	2	$+\infty$
$-2x^2 - 6x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$D(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0
$\frac{x^2 + 8x + 6}{D(x)}$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0
$f'(x)$			$\parallel$	$+$	0	$-$
$f(x)$			$\parallel$	$\searrow$	$\nearrow$	$\parallel$

– Troisième étape: Limites

Limite en -1

On a

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} = \infty$$

En étudiant le signe de $\frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$ on obtient (voir première étape) :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

Limite en 2

De même, on a

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

– **Quatrième étape: Tangentes et Asymptotes**

La fonction f admet deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

 Exemple: Étudions la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Lien avec les inéquations

5 Primitives et logarithmes

Propriété 16.14

Soit u une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I . La fonction f , définie par

$$\forall x \in I ; f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

admet pour primitive la fonction F définie sur I par

$$\forall x \in I ; F(x) = \ln |u(x)|$$

 Exemple: Une primitive de $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+9}$ est la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \ln(x^2 + 5x + 9)$$

II Exponentielles

1 Définition et propriétés algébriques

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la fonction logarithme népérien est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 16.4

Soit f une bijection de I sur E . On appelle fonction réciproque de f , la fonction, notée f^{-1} définie par

$$\forall y \in E ; f^{-1}(y) = x \text{ si } f(x) = y$$

 Remarque: Avec les notations précédentes, f^{-1} est une bijection de E sur I .

Définition 16.5

La fonction exponentielle, notée $\exp$ est définie comme étant la fonction réciproque du logarithme sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\forall y \in \mathbb{R} ; \forall x \in]0; +\infty[; e^y = x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

On a donc la proposition suivante :

Propriété 16.15

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \ln(e^x) = x ; \forall x \in]0; +\infty[; e^{\ln(x)} = x$$

Démonstration:

Soit x un réel. Posons $y = e^x$.

Puisque les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques, on a

$$x \xrightleftharpoons[\exp]{\ln} y$$

d'où

$$\ln(e^x) = \ln(y) = x$$

De même, si $x > 0$, on pose $y = \ln(x)$.

Puisque les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques, on a

$$x \xrightleftharpoons[\ln]{\exp} y$$

d'où

$$e^{\ln(x)} = e^y = x$$

■

et

Propriété 16.16

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \exp(x) > 0$$

En particulier $\exp(0) = 1$.

Théorème 16.2: Propriété fondamentale de l'exponentielle

$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}$

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

☞ Remarque: Notation e^x :

La propriété fondamentale de l'exponentielle est identique à celle que l'on rencontre lorsqu'on étudie les puissances. On convient donc de noter

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \exp(x) = e^x$$

On déduit du résultat précédent le résultat suivant :

Propriété 16.17

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \text{ et } e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$
$$e^{na} = (e^a)^n \text{ et } \sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{1}{n} \cdot a}$$

2 Étude de la fonction exponentielle

D'après la théorie sur les fonctions bijectives, on a le résultat suivant :

Propriété 16.18

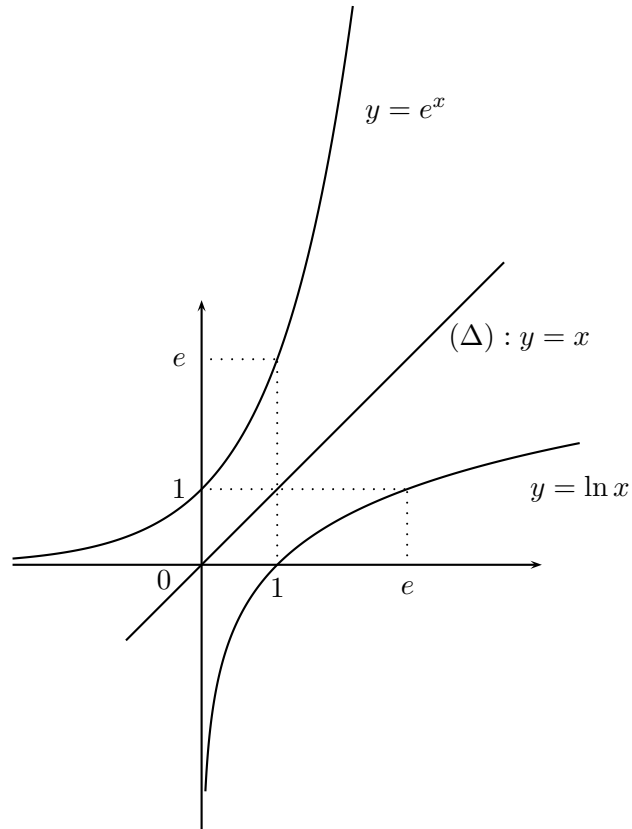
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) = e^x$$

Or, si x appartient à $\mathbb{R}$, alors $e^x > 0$.

C'est pourquoi la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

☞ Remarque: De plus, puisque les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques l'une de l'autre, la courbe représentative de la fonction exponentielle est l'image de celle de la fonction logarithme népérien par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On obtient donc l'allure suivante :



3 Limites et exponentielles

Propriété 16.19: Limites aux bornes du domaine

On obtient les limites suivantes pour la fonction $\ln$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration:

Puisque les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques l'une de l'autre, on peut inverser le rôle des images et des antécédents si on passe de la fonction $\ln$ à la fonction $\exp$: l'image y du réel x par la fonction $\exp$ est l'antécédent de x par la fonction $\exp$.

Pour les limites se résultat permet de trouver les limites de la fonction $\exp$ en connaissant celles de la fonction $\ln$. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

(Il suffit de permuter la limite et la valeur du point où l'on calcule la limite, même dans le cas où l'un des deux est infini).

De même

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

■

Propriété 16.20: Croissance comparée

Soit n un entier supérieur ou égal à n .

On obtient les limites suivantes pour la fonction $\exp$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

En particulier lorsque $n = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

 **Remarque:** Ces limites sont des formes indéterminées. Pour lever de telles formes indéterminées, on applique les résultats de croissance comparée.

On retient que l'exponentielle « l'emporte » sur les puissances de x .

Propriété 16.21: Taux d'accroissement de la fonction exponentielle

On obtient la limites suivante pour la fonction $\exp$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4 Équations et inéquations avec des exponentielles

- Équations de la forme $e^A = e^B$.

Puisque la fonction exponentielle est une bijection, on obtient le résultat suivant :

Propriété 16.22: Résolution des équations de la forme $e^A = e^B$

Si A et B sont deux réels, on a

$$e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$$

 Remarque: Il ne faut pas oublier de chercher le domaine de définition de l'équation avant de résoudre l'équation (même si souvent avec les exponentielles le domaine vaut $\mathbb{R}$).

La proposition précédente nous permet de résoudre certaines équations avec des exponentielles :

 Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{x^2} = e^{2x+3}$.

Puisque la fonction exponentielle est une bijection, on a

$$e^{x^2} = e^{2x+3} \Leftrightarrow x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

On doit donc résoudre une équation du second degré. Calculons son discriminant

$$\Delta = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

L'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet donc deux solutions x_1 et x_2 qui vérifient les relations suivantes :

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

D'où l'ensemble S des solutions de l'équation $e^{x^2} = e^{2x+3}$ est

$$S = \{-1 ; 3\}$$

- Équations de la forme $e^A = B$.

Puisque la fonction exponentielle est une bijection, et que sa réciproque est la fonction logarithme népérien, alors on a le résultat suivant :

Propriété 16.23: Résolution des équations la forme $e^A = B$

Si A et B sont deux réels, on a deux cas :

$$e^A = B \Leftrightarrow A = \ln(B) \text{ si } B > 0$$

Sinon, si $B \leq 0$, alors l'équation $e^A = B$ n'a pas de solution.

 Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{x^2-3x} = 2$.

On a

$$e^{x^2-3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = \ln(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x - \ln(2) = 0$$

On obtient donc une équation du second degré

$$\Delta = 9 + 4\ln(2) > 0$$

L'équation $e^{x^2-3x} = 2$ admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 + 4\ln(2)}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 + 4\ln(2)}}{2}$$

D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{x^2-3x} = 2$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{9 + 4\ln(2)}}{2} ; \frac{3 + \sqrt{9 + 4\ln(2)}}{2} \right\}$$

• Équations et polynômes en e^x .

La méthode de résolution des équations faisant intervenir un polynôme en e^x consiste à poser un changement d'inconnue $X = e^x$.

 **Remarque:** Dans la plupart des exercices, en posant ce changement d'inconnue, on se ramène à une inéquation du second degré.

 **Exemple:** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{2x} + e^x - 1 = 0$.

On pose $X = e^x$. On obtient donc l'équation (en X) suivante

$$e^{2x} + e^x - 1 = 0 \Rightarrow X^2 + X - 1 = 0$$

On doit donc résoudre une équation du second degré. Calculons son discriminant

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

L'équation $X^2 + X - 1 = 0$ admet donc deux solutions X_1 et X_2 définies ainsi :

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Il nous faut désormais trouver les solutions de l'équation initiale (en x), c'est-à-dire qu'il faut résoudre les équations suivantes :

$$e^x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } e^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

La première équation n'admet pas de solution car $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ or $e^x > 0$. Il reste donc à résoudre la seconde équation. Or

$$e^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

C'est pourquoi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{2x} + e^x - 1 = 0$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ \ln\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \right\}$$

• Inéquations de la forme $e^A \leq e^B$ ou $e^A < e^B$.

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient le résultat suivant :

Propriété 16.24: Résolution des inéquations

Si A et B sont deux réels, on a

$$e^A \leq e^B \Leftrightarrow A \leq B \text{ et } e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$$

 **Exemple:** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{x^2} \leq e^{3x-2}$.

Puisque la fonction exponentielle est une bijection, on a

$$e^{x^2} \leq e^{3x-2} \Leftrightarrow x^2 \leq 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

On doit donc résoudre une équation du second degré. Calculons son discriminant

$$\Delta = 9 - 8 = 1 = 1^2$$

L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet donc deux solutions x_1 et x_2 qui vérifient les relations suivantes :

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Il faut désormais trouver le signe de ce polynôme. Or, d'après le cours sur les polynômes du second degré, on sait qu'un tel polynôme est négatif entre ces deux racines (car $a = 1 > 0$).

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	$-$	$+$

D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{x^2} \leq e^{3x-2}$ est

$$\mathcal{S} = [1 ; 2]$$

- Inéquations de la forme $e^A \leq B$ ou $e^A \geq B$.

Puisque la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction $\ln$, on a

Propriété 16.25: Résolution des inéquations

Si A et B sont deux réels, on a deux cas pour les équations de la forme $e^A \leq B$ ou $e^A > B$:

- Premier cas : Si $B > 0$

$$e^A \leq B \Leftrightarrow A \leq \ln(B) \text{ et } e^A \geq B \Leftrightarrow A \geq \ln(B)$$

- Deuxième cas : Si $B \leq 0$

$$e^A \leq B \text{ est impossible et } e^A \geq B \text{ est toujours vraie}$$

 Remarque: On a des résultats analogues lorsque les inégalités sont strictes.

 Exemples:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{x^2} < 7$.

Le domaine de l'inéquation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

7 est strictement positif, donc

$$e^{x^2} < 7 \Leftrightarrow x^2 < \ln(7) \Leftrightarrow x^2 - \ln(7) < 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{\ln(7)})(x + \sqrt{\ln(7)}) < 0$$

D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{x^2} < 7$ est

$$\mathcal{S} = [-\sqrt{\ln(7)} ; \sqrt{\ln(7)}]$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{-x} < 2 - \sqrt{5}$.

Le domaine de l'inéquation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Puisque $2 - \sqrt{5} < 0$ et que $e^{-x} > 0$, l'inégalité $e^{-x} < 2 - \sqrt{5}$ n'est jamais vérifiée (en effet, l'inégalité est dans le mauvais sens). D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{-x} < 2 - \sqrt{5}$ est

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{-x+3x^3} > -5$.

Le domaine de l'inéquation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Puisque $-5 < 0$ et que $e^{-x+3x^3} > 0$, l'inégalité $e^{-x+3x^3} > -5$ est toujours vérifiée (en effet, l'inégalité est dans le bon sens). D'où l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{-x+3x^3} > -5$ est

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

• Inéquations et polynômes en e^x .

La méthode de résolution des équations faisant intervenir un polynôme en e^x consiste à poser un changement d'inconnue $X = e^x$.

☞ Remarque: Dans la plupart des exercices, en posant ce changement d'inconnue, on se ramène à une inéquation du second degré.

☞ Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{2x} - 3e^x > 7$.

Posons $X = e^x$. On a $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$.

D'où on obtient $X^2 - 3X > 7$ ou encore $X^2 - 3X - 7 > 0$.

Calculons le discriminant Δ de ce polynôme du second degré : $\Delta = 9 + 28 = 37 > 0$.

Le polynôme $X^2 - 3X - 7$ admet donc deux racines simples :

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2} ; X_2 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
$X^2 - 3X - 7$		+	-	+

C'est pourquoi

$$X^2 - 3X - 7 > 0 \Leftrightarrow X \in \left] -\infty ; \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{37}}{2} ; +\infty \right[$$

Nous allons retraduire cette appartenance en termes d'inégalités. X est solution de l'inéquation $X^2 - 3X - 7 > 0$ si et seulement si

$$X \leq \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \text{ ou } X \geq \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$$

Or, $X = e^x$ (donc $x = \ln(X)$). En remplaçant X par e^x on obtient

$$e^x \leq \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \text{ ou } e^x \geq \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$$

En composant par la fonction $\ln$ qui est strictement croissante, on obtient alors

$$x \leq \ln\left(\frac{3 - \sqrt{37}}{2}\right) \text{ ou } x \geq \ln\left(\frac{3 + \sqrt{37}}{2}\right)$$

C'est pourquoi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{2x} - 3e^x > 7$ est

$$\mathcal{S} = \left] -\infty ; \ln\left(\frac{3 - \sqrt{37}}{2}\right) \right] \cup \left[\ln\left(\frac{3 + \sqrt{37}}{2}\right) ; +\infty \right[$$

5 Fonction e^u

Domaine de définition

Propriété 16.26

Soit u une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_u$, alors la fonction composée $f = e^u$ est définie sur $\mathcal{D}_u$.

Autrement dit $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_u$

 Exemple: La fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{7x-12}{36x+7}}$ est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{7}{36} \right\}$$

 Remarque: Comme nous l'avons signaler lors des chapitres précédents, il faut toujours chercher le domaine de définition de f **avant** de modifier f à l'aide des propriétés algébriques.

Dérivée

Propriété 16.27

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I ; f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

On note en abrégé

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

 Exemples: • Si $f(x) = e^{3x+4}$, alors f est de la forme e^u avec $u(x) = 3x + 4$ qui est dérivable sur $I = \mathbb{R}$, d'où $\forall x \in \mathbb{R} \ u'(x) = 3$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 3 \cdot e^{3x+4}$$

• Si $f(x) = e^{x^2}$ alors $u(x) = x^2$ et $I = \mathbb{R}$ d'où puisque $u'(x) = 2x$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$$

Propriété 16.28

Soit a un réel quelconque, alors la fonction composée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

Primitives de $u' \times e^u$ et intégrales correspondantes

Propriété 16.29

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $f = u' \times e^u$ admet une primitive F sur I et

$$\forall x \in I ; F(x) = e^{u(x)}$$

Chapitre 17

Compléments sur les limites

I Limites et relation d'ordre

Propriété 17.1: (Prolongement des inégalités)

Si au voisinage d'un réel a , on a $f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, et si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$$

Alors on a $\ell \leq \ell'$

 **Remarque:** On dit que l'on passe à la limite dans l'inégalité. On obtient une inégalité **large** dans tous les cas (même si l'inégalité dont on part était stricte).

 **Exemple:** Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + 1)$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x + 1) > \ln(1)$.

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

Et, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(0 + 1) = \ln(1) = 0$$

On a donc $\ell = 0$ et $\ell' = 0$ et $\ell \leq \ell'$.

Propriété 17.2: (Limites infinies)

- Si au voisinage d'un réel a , on a $f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, et si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

- Si au voisinage d'un réel a , on a $f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, et si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

 **Remarque:** Il est fondamental de comprendre que toute fonction n'admet pas de limite en un point a .

Par exemple la fonction **partie fractionnaire** notée φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

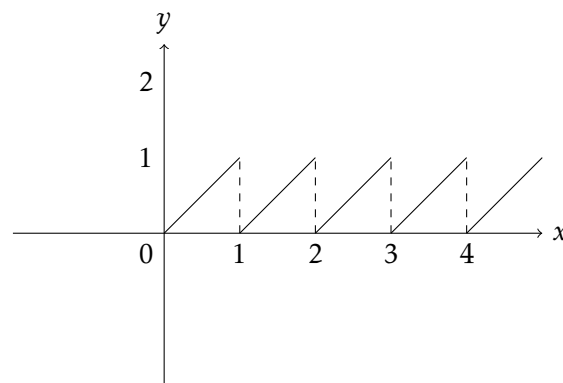


FIGURE 17.1 – Représentation graphique de la fonction partie fractionnaire

($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière, $\text{floor}(x)$ en *Scilab*) n'a pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$. Ce qui nous empêche d'opérer sur les limites.

 Exemple: Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + 1) + \varphi(x)$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty$$

φ n'a pas de limite en $+\infty$. Mais on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \ln(e^x + 1)$$

Et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

II Théorème de convergence monotone et des gendarmes

Théorème 17.1: (Théorème de convergence monotone)

- Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $]a, b[$.
 - (a) Si f est majorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie en b .
 - (b) Si f est minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie en a .
- Soit f une fonction décroissante sur l'intervalle $]a, b[$.
 - (a) Si f est minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie en b .
 - (b) Si f est majorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie en a .

Théorème 17.2: (Théorème de la limite monotone)

- Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $]a, b[$.
 - (a) Si f n'est pas majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.
 - (b) Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.
- Soit f une fonction décroissante sur l'intervalle $]a, b[$.
 - (a) Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.
 - (b) Si f n'est pas majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.

Remarque:

Les deux théorèmes précédents sont encore valables lorsque on remplace a par $-\infty$ ou b par $+\infty$.

Exemple:

Ceci permet d'amortir la **démonstration** des résultats de croissance comparée.

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

On a

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

D'où f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et est minorée par 0 sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

D'où f admet une limite finie notée ℓ en $+\infty$.

Attention ! A ce point nous ne pouvons pas encore en conclure que $\ell = 0$.

Théorème 17.3: (Théorème des gendarmes)

Soient trois fonctions f, g et h définies au voisinage de a et soit ℓ un réel.

Si au voisinage de a , on a $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$, et si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$$

alors f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

Exemple: Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + 1) + \varphi(x)$$

On cherche à déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x + 1) = \ln(e^x \times (1 + e^{-x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

Cette forme est plus intéressante puisqu'elle nous ramène en $-\infty$.

On a donc

$$\forall x > 0, \frac{f(x)}{x} = \frac{x + \ln(1 + e^{-x}) + \varphi(x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$$

On obtient l'encadrement suivant :

$$\forall x > 0, 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} + \frac{1}{x}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = 1 + 0 = 1$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} + \frac{1}{x} = 1 + 0 + 0 = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, f admet une limite finie en $+\infty$, et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Chapitre 18

Systèmes linéaires

I Définitions

1 Système linéaire et équivalence

Définition 18.1: Système linéaire

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle *système linéaire* de n équations, à p inconnues réelles $x_1, x_2, \dots, x_p$, le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{p,1} x_1 + a_{p,2} x_2 + \dots + a_{p,n} x_n = b_p \end{cases}$$

Où $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $a_{i,j}$ et b_i sont des réels connus.

 Remarque: La $i^{\text{ème}}$ équation du système est notée (L_i) est appelée $i^{\text{ème}}$ ligne de (S) .

Définition 18.2: Résolution

Résoudre le système (S) , c'est chercher tous les p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ vérifiant toutes les équations de S .

 Remarque: Un système linéaire peut avoir :

- aucune solution ($\mathcal{S} = \emptyset$).
- une solution.
- une infinité de solutions.

Définition 18.3: Systèmes équivalents

On dit que deux systèmes S et S' sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions

2 Système de Cramer

Définition 18.4: Systèmes équivalents

Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues.

On dit que S est un **système de Cramer** s'il admet une unique solution.

 Remarque: Bien souvent dans les exercices, on nous demande de résoudre un système de Cramer.

 Exemple: Dans une classe de 30 élèves, il y a quatre fois plus de germanisants que d'hispanisants.

Déterminer le nombre d'hispanisants et de germanisants.

On note x le nombre de germanisants et y le nombre d'hispanisants.

On obtient le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y = 30 \\ x = 4y \end{cases}$$

On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 & L_1 \\ x - 4y = 0 & L_2 \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un système linéaire, avec $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 1$, $a_{2,1} = 1$, $a_{2,2} = -4$

Puis $b_1 = 30$ et $b_2 = 0$.

On remplace x par $4y$ dans L_1 , et on obtient : $4y + y = 30 \Leftrightarrow 5y = 30 \Leftrightarrow y = \frac{30}{5} = 6$.

Il y a 6 hispanisants et donc 24 germanisants.

On obtient $S = \{(24, 6)\}$, c'est-à-dire $x = 24$ et $y = 6$.

II Résolution d'un système linéaire

1 Méthode par substitution

On peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction des autres et on remplace l'inconnue dans une autre ligne, et on recommence jusqu'à ce qu'on obtienne une équation ne contenant qu'une seule inconnue.

Cette méthode est très pratique pour les systèmes de deux équations à deux inconnues.

 Exemple: Soit le système :

$$(S) : \begin{cases} 2x + y = 13 & L_1 \\ x - y = -4 & L_2 \end{cases}$$

Dans L_2 , on obtient $x = y - 4$.

Dans L_1 , on remplace x par $y - 4$.

On obtient donc $2(y - 4) + y = 13 \Leftrightarrow 2y - 8 + y = 13 \Leftrightarrow 3y = 13 + 8 \Leftrightarrow 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$ Enfin,

dans L_2 , on obtient $x = y - 4 = 7 - 4 = 3$.

On obtient $S = \{(3, 7)\}$

2 Méthode du pivot de Gauss

Définition 18.5

Soit un système d'équations à n lignes notées $L_1, L_2 \dots L_n$. Soit i et j des entiers distincts compris entre 1 et n .

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes du système es transformations suivantes :

- L'échange de deux lignes (ou de deux équations) L_i et L_j . On note $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow L_i$.
- Le remplacement d'une ligne L_i par un multiple non nul de celle-ci. On note par exemple $L_i \leftarrow \alpha L_i$ si on multiplie la $i^{\text{ème}}$ ligne par α où α désigne un réel non nul.
- Le remplacement d'une ligne L_i par une combinaison linéaire (avec des coefficients non nuls) entre L_i et L_j . On note par exemple $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ si α et β sont les deux coefficients.

Propriété 18.1

Si on transforme un système à l'aide d'une opération élémentaire, on obtient un système équivalent.

 **Remarque:** Il faut appliquer une opérations élémentaires à la fois, sinon on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Par exemple les systèmes suivants ne sont pas équivalents pourtant on n'a effectué que des opérations élémentaires :

$$(E) : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} ; (F) : \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + 2L_2 \end{array}$$

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant seulement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

 **Exemple:** On souhaite résoudre le système

$$(E) : \begin{cases} 2y + z - t = 8 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 3x + y + z + 3t = 5 \\ 2x - 3y + z + 3t = -4 \end{cases}$$

Première Étape : Il faut que la première équation contienne la première inconnue (ici x) si cela n'est pas le cas on permute la première ligne avec une autre ligne qui contient des x (avec si possible le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants). Ici on permute les lignes 1 et 2. Puis à l'aide du troisième type d'opérations élémentaires sur les lignes, on fait « disparaître » la première inconnue dans les équations L_2 , L_3 et L_4 : on nettoie la première colonne des x .

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2y + z - t = 8 & L_2 \leftarrow L_1 \\ 3x + y + z + 3t = 5 & L_3 \\ 2x - 3y + z + 3t = -4 & L_4 \end{cases}$$

Pour supprimer la première inconnue (ici x) dans la troisième ligne, on a transformé L_3 par une combinaison entre L_1 et L_3 . Pour supprimer la première inconnue dans la quatrième ligne, on a transformé L_4 par une combinaison entre L_1 et L_4 .

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 & L_1 \\ 2y + z - t = 8 & L_2 \\ 4y - 2z - 3t = 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ -y - z - t = -4 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

Deuxième Étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Il n'y a dans cet exemple rien à faire ici puisque la deuxième équation contient $2y$ si tel n'avait pas été le cas, on aurait permuté la ligne 2 avec une ligne contenant des y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants) mais **sans utiliser la ligne 1**. Puis à l'aide du 3ème type d'opérations élémentaires sur les lignes **sans utiliser la ligne 1**, on fait « disparaître » la deuxième inconnue dans L_3 et L_4 : on nettoie la deuxième colonne de y .

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 & L_1 \\ 2y + z - t = 8 & L_2 \\ -4z - t = -11 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ -z - 3t = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2 \end{cases}$$

Troisième Étape : On fait de même avec z **sans utiliser les deux premières lignes**.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 & L_1 \\ 2y + z - t = 8 & L_2 \\ -4z - t = -11 & L_3 \\ 11t = -11 & L_4 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{cases}$$

Quatrième Étape : On obtient un système triangulaire ou échelonné que l'on sait résoudre.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

d'où on note

$$\mathcal{S} = \{(1; 2; 3; -1)\}$$

Chapitre 19

Suites réelles

Ce chapitre sera consacré à l'étude des suites. Les suites sont l'analogue des fonctions, lorsque la variable est entière et non plus réelle. Les suites sont très utiles dans des problèmes liés aux taux d'intérêts, aux amortissements et dans plusieurs autres domaines de l'économie. Dès que l'on étudie un phénomène qui dépend du temps par exemple, et que le temps en question est discret (par exemple pour les intérêts d'un compte en banque, tous les 31 Décembre), alors l'introduction d'une suite est inévitable.

I Définitions

1 Définition et premiers exemples

Définition 19.1

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Plutôt que de noter la suite f on la note u et on note u_n l'image de l'entier n que l'on appelle *terme d'indice n* de la suite.

 Exemple: La séquence 1, 3, 5, 7, etc... définit une suite u_n . C'est la suite des nombres impairs. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2n + 1$$

Le terme d'indice 0 est $u_0 = 1$. Le terme d'indice 7 est $u_7 = 2 \times 7 + 1 = 14 + 1 = 15$.

 Exemple: La séquence -1, 1, -1, 1, etc... définit une suite v_n . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = (-1)^n$$

Le terme d'indice 0 est $u_0 = 1$. Le terme d'indice 9999 est $u_{9999} = -1$.

2 Définition explicite et implicite d'une suite numérique

Définition 19.2

On dit qu'on donne une définition *explicite* de la suite (u_n) , lorsqu'on donne une expression de u_n en fonction de n .

 Exemple: Soit u_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{3n + 7}{9n + 8}$$

On a défini u_n de façon explicite.

Définition 19.3

On dit qu'on donne une définition *implicite* de la suite (u_n) , lorsqu'on donne une expression de certains termes en fonction des précédents. Il faut aussi dans ce cas donner les valeurs des premiers termes

 Exemple: Soit u_n définie par $u_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{3u_n + 7}{9u_n + 8}$$

On a défini u_n de façon implicite.

 Remarque: La relation $u_{n+1} = \frac{3u_n + 7}{9u_n + 8}$ est appelée *relation de récurrence* de la suite (u_n) .

II Sens de variation et limite d'une suite

1 Sens de variation d'une suite

Définition

Définition 19.4

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq n_0$. Soit n_1 un entier supérieur ou égal à n_0 . On dit que (u_n) est croissante à partir du rang n_1 , si pour tout n on a :

$$\forall n \geq n_1 ; u_{n+1} \geq u_n$$

On dit que (u_n) est décroissante à partir du rang n_1 si pour tout n on a :

$$\forall n \geq n_1 ; u_{n+1} \leq u_n$$

On dit que (u_n) est constante à partir du rang n_1 si pour tout n on a :

$$\forall n \geq n_1 ; u_{n+1} = u_n$$

On dit que (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

 Remarque: Si $n_1 = n_0$, la l'expression « à partir du rang n_1 » peut être sous-entendue.

 Exemple: Soit u_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = n^2 + 1$$

On va comparer deux termes consécutifs de la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 1 + 1 = n^2 + 2n + 2 > u_n$$

Donc (u_n) est une suite croissante. (inutile de préciser à partir du rang 0, voir remarque précédente).

 Exemple: Soit u_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = n - (-1)^n$$

On a $u_0 = -1$; $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$. Donc la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

☞ **Remarque:** Contrairement aux fonctions, qui peuvent avoir plusieurs sens de variations, si on étudie la fonction sur une réunion d'intervalles, une suite n'a qu'un seul sens de variation. En effet, soit une suite (u_n) telle que

$$u_0 > u_1 > u_2 \text{ mais } \forall n \geq 2 ; u_{n+1} \geq u_n$$

On ne dit pas que (u_n) est décroissante entre le rang 0 et le rang 2, puis croissante à partir du rang 2. On ne regarde que ce qui se passe *à partir d'un certain rang*. C'est pourquoi, dans ce cas, (u_n) est croissante à partir du rang 2.

Étude du sens de variation d'une suite

• Première méthode : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Soit u_n la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 3^n - n$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - (n+1) - (3^n - n) = 3^{n+1} - 3^n - n - 1 + n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n - 1 = 3 \times 3^n - 3^n - 1 = 2 \times 3^n - 1$$

Or si $n \geq 0$, alors $3^n \geq 1$ donc $2 \times 3^n - 1 \geq 2 - 1 \geq 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est pourquoi u_n est croissante.

• Deuxième méthode : On étudie la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Soit u_n la suite définie par $\frac{2^n}{n}$ pour $n \geq 1$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} \times n}{(n+1) \times 2^n} = \frac{2n}{n+1} \geq 1$$

D'où u_n est croissante.

• Troisième méthode : On étudie la fonction f , lorsque $u_n = f(n)$.

Soit u_n la suite définie par $\frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

D'où f est croissante sur l'intervalle $[e; +\infty[$.

La suite (u_n) est donc croissante à partir du rang $n = 3$ (car $e \simeq 2,7$).

☞ **Remarque:** Lorsque plusieurs méthodes s'appliquent, on peut choisir celle que l'on préfère. Généralement la troisième s'avère plus pratique à manipuler.

Majorant, minorant et suites bornées

Définition 19.5

Soit (u_n) une suite.

On dit que (u_n) est majorée par M si

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq M$$

On dit que (u_n) est minorée par m si

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq m$$

On dit que (u_n) est bornée si elle est minorée et majorée.

2 Limites**Définition****Définition 19.6**

Soit (u_n) une suite.

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ si u_n peut-être rendu aussi proche de ℓ que l'on veut dès que n est suffisamment grand . On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Définition 19.7

Soit (u_n) une suite.

On dit qu'une suite (u_n) est diverge vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si u_n est aussi grand (resp. aussi petit) que l'on veut dès que n est suffisamment grand . On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

 **Remarque:** Contrairement aux fonctions, on ne peut prendre la limite d'une suite que lorsque n tend vers $+\infty$. C'est pourquoi la notation suivante n'a pas de sens

$$\lim_{n \rightarrow 1} u_n = 3 \quad \text{Ne pas écrire cela !}$$

Propriété 19.1

Soit u_n une suite définie de façon explicite par

$$\forall n \geq n_0 ; u_n = f(n)$$

où f désigne une fonction admettant une limite (finie ou infinie) en $+\infty$. Dans ce cas, u_n admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

☞ Remarque: Nous étudierons uniquement les limites des suites définies de façon explicite de la forme $u_n = f(n)$ où f désigne une fonction de la variable réelle. Les suites définies de façon implicite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ seront étudiées dans un chapitre ultérieur (voir programme de deuxième année).

✎ Exemple: Soit u_n définie par

$$\forall n \geq 1 ; u_n = \frac{3n^2}{\ln(n)}$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0^+$$

D'où en inversant le quotient on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

C'est pourquoi (u_n) diverge vers $+\infty$.

Lien entre convergence et inégalités

Théorème 19.1: Théorème de convergence monotone

Si (u_n) est une suite croissante majorée, alors (u_n) converge.

Si (u_n) est une suite décroissante minorée, alors (u_n) converge.

✎ Exemple: Soit u_n définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1024 \\ u_{n+1} = \frac{7 \cdot u_n}{2^n} \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$. On peut donc diviser par u_n .

On a

$$\forall n \geq 1 ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7}{2^n}$$

Or

$$\frac{7}{2^n} \leq 1 \Leftrightarrow 7 \leq 2^n \Leftrightarrow n \ln(2) \geq \ln(7) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(7)}{\ln(2)}$$

C'est pourquoi, u_n est décroissante à partir du rang 3 (car $2 < \frac{\ln(7)}{\ln(2)} < 3$) et est positive donc elle est minorée par 0. C'est pourquoi elle converge.

☞ Remarque: Le théorème de convergence monotone nous permet de montrer que (u_n) converge, mais ne permet pas de déterminer la limite de (u_n) .

Propriété 19.2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq v_n$$

et que u_n et v_n convergent, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Si au contraire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors (u_n) diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors (v_n) diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

 Exemple: Soit v_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \left(2 + (-1)^n\right) \cdot n$$

Alors en posant $u_n = n$ alors on a bien $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq v_n$.

C'est pourquoi on peut affirmer ceci :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Théorème 19.2: Théorème des Gendarmes

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que

$$v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang}$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

 Exemple: Soit u_n la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{\ln(n + n^2)}{2n + 3}$$

En posant $v_n = \frac{\ln(n)}{2n + 3}$ et $w_n = \frac{\ln(2n^2)}{2n + 3}$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n \leq u_n \leq w_n$$

Or par croissance comparée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

D'où la suite (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Chapitre 20

Propriétés de l'intégrale

I Linéarité de l'intégrale et intégration par parties

1 Linéarité de l'intégrale

Propriété 20.1

Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$.
Soit k une constante réelle. On a

$$\int_a^b (ku(x) + v(x))dx = k \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx$$

 Exemple: Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$$

On a

$$I = \int_0^1 \frac{x+1-1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$I = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx = [x]_0^1 - [\ln(x+1)]_0^1 = (1-0) - (\ln(2) - \ln(1))$$

D'où

$$I = 1 + \ln(2)$$

2 Intégration par parties

Propriété 20.2: Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

 Exemple: Calculer en intégrant par parties, l'intégrale suivante

$$I = \int_1^2 x \ln(x) dx$$

On pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= x & \Rightarrow & u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) &= \ln(x) & \Rightarrow & v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

D'où en intégrant par parties, on obtient

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx$$

D'où

$$I = \frac{2^2}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

II Positivité de l'intégrale et relation de Chasles

1 Positivité de l'intégrale

Propriété 20.3: Positivité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$. Si $f \leq g$, alors on a

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

 Exemple: Déterminer le signe de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+x^2} \geq 0$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\boxed{I \geq 0}$$

2 Relation de Chasles

Propriété 20.4: Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$. Soit c un réel, tel que $a < c < b$.
On a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

 Exemple: Les deux résultats précédents permettent de calculer des valeurs approchées d'une intégrale par la méthode dite des rectangles.

On pose $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

On a

$$I = \left[\ln(x) \right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

$$I = \ln(2)$$

On pose

$$J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx, \quad K = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x} dx$$

D'après la relation de Chasles, on obtient

$$I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x} dx = J + K$$

Par positivité de l'intégrale, on obtient

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \leq I \leq 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

D'où

$$\frac{7}{12} \leq I \leq \frac{5}{6}$$

Or,

$$\frac{7}{12} \simeq 0,5833 \text{ et } \frac{5}{6} \simeq 0,833$$

D'où

$$\ln(2) \simeq 0,708 \pm 0,125$$

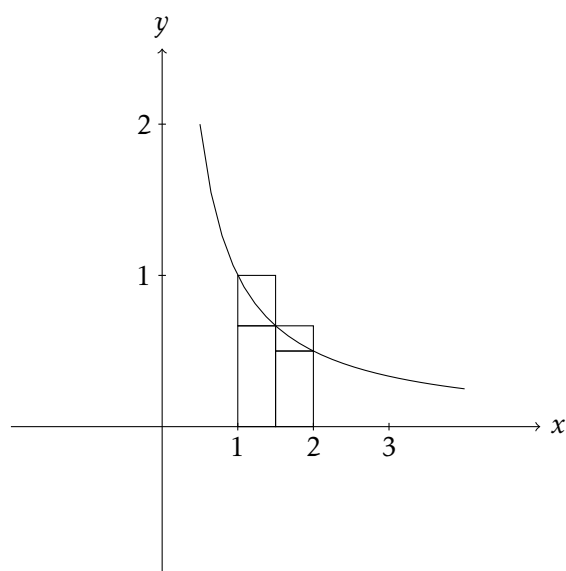


FIGURE 20.1 – Illustration de la méthode des rectangles